JOHANNES PICHT

GRUNDLAGEN DER GEOMETRISCH-OPTISCHEN ABBILDUNG

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

JOHANNES PICHT

GRUNDLAGEN DER GEOMETRISCH-OPTISCHEN ABBILDUNG

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

JOHANNES PICHT

GRUNDLAGEN DER GEOMETRISCH-OPTISCHEN ABBILDUNG

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK
Herausgeber Prof. Franz X. Eder und Prof. Robert Rompe
Band 14

Grundlagen der geometrisch-optischen Abbildung

VON DR. JOHANNES PICHT
o. Prof. für theoretische Physik und Optik
Pädagogische Hochschule Potsdam
vormals (1932—1945) Prof. für theoretische Physik und Optik
an der Technischen Hochschule Berlin

1955
VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN

Printed in Germany
Lizenz-Nr. 206. 435/413/54
Gesamtherstellung: VEB Werkdruck Gräfenhainichen - 393

Dem Andenken des

Dr. phil. Dr. rer. nat. h. c. MAX BEREK

* 16. 8. 1886 † 15. 10. 1949

weiland: Hon.-Prof. an der Universität Marburg
und wissenschaftlicher Leiter der Firma Ernst Leitz, Wetzlar

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies Buch verdankt seine Entstehung sowohl der Anregung seitens meiner Studenten als auch der Anregung durch optisch interessierte Kreise der Industrie. Es enthält im wesentlichen den Stoff meiner Vorlesungen, die ich — seinerzeit allerdings in wesentlich geringerem Umfange und geringerer Vollständigkeit — nach einer sechsjährigen Tätigkeit in der optischen Industrie bereits während meines Studiums an der Berliner Friedrich-Wilhelms-Universität in den Jahren 1920—1923, an der Volkshochschule in Rathenow, später als Privatdozent bzw. b. a. o. Professor (z. T. in Sonderkursen für die Industrie) an der Technischen Hochschule Berlin und in den letzten Jahren an der Pädagogischen Hochschule Potsdam gehalten habe. Meine in den ersten Nachkriegsjahren im Rahmen eines eigenen Forschungsinstitutes in enger Zusammenarbeit mit der Rathenower sowie zeitweise der Jenaer optischen Industrie durchgeführten theoretischen Untersuchungen und Berechnungen optischer Systeme gaben mir Gelegenheit, mich noch eingehender außer mit wellenoptischen auch mit den Fragen der geometrischen Optik zu beschäftigen und weitere praktische Erfahrungen zu sammeln, die — wie ich hoffe — diesem Buche zugute gekommen sind.

Persönlich verdanke ich dem — meines Wissens vergriffenen — Buche „Praktische Optik“ von Prof. Dr. M. BEREK, der die Optik um manche neuen theoretischen Erkenntnisse bereichert hat, viel Anregung. Ihm, den ich auch menschlich sehr schätzte, seinem Andenken habe ich daher dies Buch gewidmet.

Meinen Schülern und derzeitigen Assistenten, Herrn Dipl.-Phys. Dr. JOACHIM KLEBE und Dipl.-Phys. HORST HÄNSEL, die nach meinen Vorlesungszetteln einen ersten Entwurf für das Manuskript dieses Buches anfertigten, sowie den Herren Prof. Dr. GÖRLICH und Dr. TIEDEKEN vom Carl Zeiss-Werk, Jena, die das Manuskript einer Durchsicht unterzogen und verschiedene Anregungen zu seiner Verbesserung und Erweiterung — z. B. durch das Kapitel über das Eikonal — gegeben haben, sei auch an dieser Stelle mein Dank ausgesprochen. Ferner gilt mein Dank dem Verlag — und besonders seinem Mitarbeiter, Herrn FRITSCHE, der mich beim Lesen der Korrekturen unterstützte — sowie der Druckerei, die auf meine Wünsche bezüglich der Ausgestaltung dieses Buches bereitwilligst eingingen.

So gehe denn auch dieses meiner Bücher hinaus in die Welt und erfülle die ihm gestellte Aufgabe, zu seinem bescheidenen Teile mitzuhelfen an der wissenschaftlichen Ausbildung der studentischen Jugend und an der Erhaltung und Steigerung der Güte der Erzeugnisse der optischen Industrie.

Potsdam, im September 1955 — JOHANNES PICHT



Einführung

Die „optische Abbildung", also die Erzeugung eines Bildes von einem gegebenen Objekt mittels eines optischen Systems, ist — streng genommen — ein verhältnismäßig komplizierter Vorgang. Da das Licht ein (elektromagnetischer) Schwingungsvorgang ist, muß eigentlich untersucht werden, in welcher Weise die von den einzelnen Objektpunkten ausgehenden Lichtwellen durch das abbildende optische System in der Gestalt ihrer — ursprünglich als Kugelflächen anzunehmenden — Wellenflächen verändert werden, wie sich die *Beugung* des Lichtes an den Blenden bzw. Linsenrändern auf das Bild des betreffenden Objektpunktes auswirkt, wie die durch die Beugung des Lichtes sowie die Gestaltsänderung, die *Deformation*, der Wellenflächen bedingte *Verbreiterung* der *Bildpunkte* die Abbildungsgüte beeinflußt. Hinzu kommt noch, daß die Intensität einer von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtwelle nach den verschiedenen Richtungen innerhalb dieser Lichtwelle nicht konstant zu sein pflegt und sich außerdem beim Durchgang durch das optische System in den verschiedenen Richtungen verschieden stark ändert.

In vielen Fällen aber genügt es, bei der Behandlung der optischen Abbildung und ihrer Güte bzw. ihrer Fehler *strahlenoptisch* zu rechnen, also anzunehmen, daß von den einzelnen Objektpunkten *Lichtstrahlen*[1] geradlinig ausgehen, die an den einzelnen Flächen des optischen Systems beim Übergang aus dem einen in das folgende *Medium* aus ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt, d. h. *gebrochen* werden, wobei diese Brechung nach dem Brechungsgesetz erfolgt. Jedem Medium läßt sich nämlich ein *Brechungsindex* n zuordnen, der außer von der chemischen Zusammensetzung des einzelnen Mediums — im allgemeinen: des Glases bestimmter Art oder in besonderen Fällen auch anderer durchsichtiger Stoffe, wie z. B. Steinsalz, Flußspat usw. — noch von der Wellenlänge und damit von der Farbe des Lichtes abhängt und gleich ist dem

---

[1] „Lichtstrahlen" existieren — streng genommen — nicht. Es ist eine Bezeichnung für etwas Abstraktes, etwas Unwirkliches, nur Gedachtes. Es handelt sich hier eigentlich um die Normalen der (im allgemeinen deformierten) Wellenflächen.

Oft bezeichnet man auch den Energieströmungsvektor $\mathfrak{S}$ (POINTINGschen Vektor) als „Strahlvektor". Doch haben Wellenflächennormale und $\mathfrak{S}$ (auch im zeitlichen Mittel) im allgemeinen — auch in isotropen homogenen Medien — bei einem Strahlenbündel endlicher Öffnung in der Nachbarschaft der Randstrahlen des Bündels *nicht* die gleiche Richtung. [Vgl. J. PICHT, Über die Richtung der Energieströmung . . . Ann. d. Phys. (5. F.) 4, 273—284, 1930.]

Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum zu der Lichtgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) v in dem betreffenden Medium, also $n = \frac{c}{v}$.

Dabei erfolgt die Brechung des Lichtstrahles so, daß das Produkt aus dem Brechungsindex n_1 des ersten Mediums und dem Sinus des Winkels, den der ankommende Strahl mit der Normalen der Grenzfläche zwischen dem ersten und dem ihm folgenden (zweiten) Medium bildet — und der mit i_1 bezeichnet sei —, gleich ist dem Produkt aus dem Brechungsindex $n'_1 = n_2$ des zweiten Mediums und dem Sinus des Winkels, den der gebrochene Strahl mit der Normalen jener Grenzfläche bildet, daß also $n_1 \sin i_1 = n'_1 \sin i'_1$ ist, eine Beziehung, die man als „SNELLIUSsches Brechungsgesetz" bezeichnet. Vom Standpunkt dieser „Strahlenoptik" oder — wie man auch sagt — dieser „geometrischen Optik" wollen wir hier die optische Abbildung behandeln.[1]

Dabei ist es prinzipiell *nicht* erforderlich, die Fragen der Spiegelung des Lichtes an ebenen oder gekrümmten Flächen gesondert zu behandeln, da die für die Brechung abgeleiteten Ausdrücke und Formeln sofort auch für die Spiegelung gültig sind, wenn man in ihnen den Brechungsindex n'_1 $(= n_2)$ (— oder allgemeiner, wenn die Spiegelung an der k-ten Fläche erfolgt: den Brechungsindex n'_k —) durch den Wert $-n_1$ (bzw. $-n_k$) ersetzt. Denn nach dem SNELLIUSschen Reflexionsgesetz ist der Winkel i^*, den der reflektierte Strahl mit dem Einfallslot bildet, gleich dem Supplement des Winkels i, den der einfallende Strahl mit dem Einfallslot bildet, also $i^* = \pi - i$. Dies verbunden mit einer Richtungsumkehr des Flächenlotes, gegen das die Strahlneigung gemessen wird, bedeutet, daß wir $\sin i^* = -\sin i$ zu setzen haben, was wieder gleichbedeutend ist mit $n^* \cdot \sin i^* = n \sin i$ mit $n^* = -n$, $\sin i^* = -\sin i$.

Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz lassen sich beide aus dem FERMATschen Prinzip ableiten. Um dieses Prinzip formulieren zu können, benutzen wir den Begriff der „*optischen Länge*" bzw. des „*vakuumbezogenen Lichtweges*".

Wir nennen *optisch gleich lang* zwei Strecken, zu deren Durchlaufen das Licht gleiche Zeit gebraucht, auch wenn diese Strecken in verschiedenen Medien liegen: Ist l bzw. l' die *geometrische* Länge der beiden zu vergleichenden (geradlinigen) Strecken, wo l im Medium mit der Lichtgeschwindigkeit v und l' im Medium mit der Lichtgeschwindigkeit v' liege, so sind die beiden Strecken *optisch* gleich lang, wenn $\frac{l}{v} = \frac{l'}{v'}$, also $l' = \frac{v'}{v} l = \frac{n}{n'} l$ ist. Man nennt l' die auf das Medium mit der Lichtgeschwindigkeit v' *bezogene* Länge von l. Die auf das *Vakuum* bezogene Länge von l wird demnach gleich $n\,l$, so daß $n\,l$ der „*vakuumbezogene Lichtweg*" oder seine „*optische Länge*" ist. Analog: $c = n\,v$ = *vakuumbezogene Lichtgeschwindigkeit.* Diese hat für alle Medien den gleichen

[1] Vom Standpunkt der Wellenoptik und der Beugungstheorie wurde die optische Abbildung vom Verfasser in seinem Buch „Optische Abbildung — Einführung in die Wellen- und Beugungstheorie optischer Systeme", Verlag Friedrich Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1931, behandelt (Neuauflage in Vorbereitung).

Wert c (Vakuumlichtgeschwindigkeit). Eine durch den jeweiligen Brechungsindex *dividierte* Strecke wird dagegen als „reduziert" bezeichnet.

Die Zeit, die das Licht zum Durchlaufen der Strecke l im Medium mit dem Brechungsindex n gebraucht, ist $t = \frac{1}{c} n\, l$, also proportional der optischen Länge der betreffenden Strecke.

Das „FERMAT*sche Prinzip*" sagt nun aus, daß die Zeit, die das Licht gebraucht, um von irgendeinem Punkte P zu irgendeinem zweiten Punkte Q zu gelangen, auf dem tatsächlich eingeschlagenen Wege am kürzesten ist, genauer: einen Extremwert besitzt, verglichen mit allen ihm benachbarten Wegen zwischen P und Q.

Dieses Prinzip gilt allgemein, auch bei dem Übergang des Lichtes von einem Medium zu einem zweiten, ja auch dann, wenn zwischen P und Q sich mehrere voneinander verschiedene Medien befinden (Abb. 1).

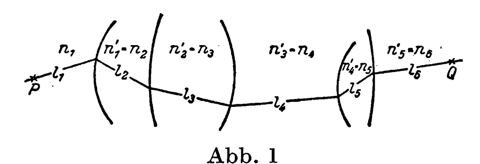


Abb. 1

Da nun die vom Licht zum Durchlaufen einer Teilstrecke gebrauchte Zeit der optischen Länge der betreffenden (geradlinigen) Strecke proportional ist, so ergibt sich für die *Gesamt*zeit:

$$t = \frac{1}{c} \sum_P^Q n_j\, l_j\,,$$

wo über alle Abschnitte des Lichtweges zwischen P und Q zu summieren ist. [Bei (räumlich) kontinuierlicher Änderung des Brechungsindex (inhomogene isotrope bzw. anisotrope Medien) geht dies über in

$$t = \frac{1}{c} \int_P^Q n\, dl\,.$$

Hier setzt sich der Lichtweg im allgemeinen nicht mehr aus geradlinigen Strecken zusammen.]

Das FERMATsche Prinzip verlangt nun, daß für den tatsächlichen Lichtweg die Beziehung gilt

$$\delta \sum_P^Q n_j\, l_j = 0 \quad \text{bzw.} \quad \delta \int_P^Q n\, dl = 0\,.$$

Hierbei deutet δ an, daß der Summenausdruck bzw. das Integral im Hinblick auf den Weg — bei festem P und Q (s. o.) — variiert werden soll.

Die Ableitung des Brechungsgesetzes aus dem FERMATschen Prinzip sei kurz angedeutet. Die des Reflexionsgesetzes erfolgt ganz analog.

Ist (Abb. 2) PAQ der vom Licht wirklich zurückgelegte Weg, so muß nach dem FERMATschen Prinzip $\delta\,(n\,l + n'\,l') = 0$ sein. Betrachten wir nun einen zu PAQ benachbarten Weg PBQ, so ist

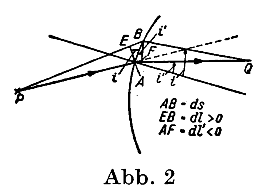


Abb. 2

$$\overline{EB} = dl\,(> 0), \qquad \overline{AF} = dl'\,(< 0),$$

$$\sphericalangle\, EAB = i, \qquad \sphericalangle\, ABF = i'.$$

Ferner sei $\overline{AB} = ds$. Dann ist

$$\delta\,(nl + n'\,l') = \frac{d}{ds}\,(nl + n'\,l')\,\delta s = \left(n\frac{dl}{ds} + n'\,\frac{dl'}{ds'}\right)\delta s = 0\,,$$

also

$$n\frac{dl}{ds} = -\,n'\,\frac{dl'}{ds'}$$

oder

$$n \sin i = n' \sin i'.$$

Dies ist das oben angegebene Brechungsgesetz von SNELLIUS.

Dabei ist vorausgesetzt, daß n in der Umgebung von P und n' in der Umgebung von Q konstant sind — eine Annahme, die uns in den in diesem Buche zu besprechenden Problemen allein interessiert.

Außerdem beschränken wir uns — sofern nicht ausdrücklich anders vermerkt — auf die Behandlung solcher optischen Systeme, deren brechende (oder spiegelnde — s. o. —) Flächen Teile von *Kugel*flächen sind, zu denen — als Grenzfall: Radius $r \to \infty$ — natürlich auch die ebenen Flächen gehören. Ferner setzen wir bei Systemen mit mehreren brechenden (bzw. spiegelnden) Flächen voraus, daß ihre Krümmungsmittelpunkte auf der gleichen Geraden liegen. Diese Gerade, also die geradlinige Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte der brechenden (bzw. spiegelnden) Flächen bezeichnen wir als „optische Achse" des betreffenden optischen Systems.

I. Vom paraxialen Strahlengang und seinen Anwendungen in der Theorie optischer Systeme

Um einige allgemeine Gesetze und Grundformeln der optischen Abbildung sowie Formeln für die ein optisches System kennzeichnenden Grundgrößen (Brennpunkte, Hauptpunkte, Brennweiten usw.) kennenzulernen, betrachten wir zunächst nur solche Strahlen, die von einem auf der (Verlängerung der) *optischen Achse* des zu dieser rotationssymmetrisch vorausgesetzten optischen Systems liegenden Punkte ausgehen und während ihres ganzen Verlaufes der Achse benachbart bleiben, also auch nur sehr kleine Winkel mit der Achse sowie — in ihren Schnittpunkten mit den brechenden Flächen — mit den Flächennormalen dieser brechenden Flächen bilden. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so sprechen wir von „paraxialen" Strahlen bzw. von einem „paraxialen" Strahlengang.

1. Vorbemerkungen

Wenn es nicht ausdrücklich anders bemerkt wird, sei die Lichtrichtung im folgenden immer von links nach rechts angenommen. Zu den Zeichnungen und den in ihnen eingetragenen *Bezeichnungen* von Strecken und Winkeln ist eine *grundsätzliche Bemerkung* erforderlich: *Alle Strecken* sind in den Zeichnungen als *„positiv"* eingetragen, also horizontale Strecken als von links nach rechts, vertikale als von unten nach oben gerichtet. Ist eine horizontale Strecke $\overrightarrow{AB}$ als „Abstand des Punktes B vom Punkte A" durch einen kleinen Buchstaben — etwa a — *definiert* und liegt in der Zeichnung B *rechts* von A, so ist an AB der Buchstabe a geschrieben. Liegt dagegen in der Zeichnung B *links* von A, so ist — da jetzt in der Zeichnung $\overrightarrow{BA} > 0$, also $\overrightarrow{AB} < 0$ ist, aber „per definitionem" $\overrightarrow{AB} = a$ zu setzen ist — an $\overrightarrow{BA}$ die Bezeichnung $-\,a$ geschrieben, wo also *wieder* $\overrightarrow{BA} = -\,a > 0$ ist, da ja A jetzt *rechts* von B liegt. Dieses **„— a"** an $\overrightarrow{AB}$ besagt dann:

1. Als „a" ist *definiert* nicht $\overrightarrow{BA}$, *sondern,* dem „—"-Zeichen entsprechend, $\overrightarrow{AB}$.

2. Dieses $\overrightarrow{AB}$ hat *bei der in der* betreffenden *Zeichnung angenommenen gegenseitigen Lage der Punkte A und B* einen negativen Betrag.

Das entsprechende gilt für *vertikale* Strecken[1] sowie für gegen die Horizontale geneigte Strecken.

Bei den *Winkeln*, für die in der geometrischen Optik bezüglich ihres „positiven" oder „negativen" Wertes leider keine so eindeutige „Vorschrift" herrscht, haben wir jeweils den — unter Berücksichtigung des Vorzeichens — *positiven* Wert eingetragen und durch den Bogenpfeil angegeben, in welcher Weise der betreffende Winkel „definiert" ist. So besagt z. B. in Abb. 25 die Bezeichnung „$-du$" am Winkel $C\!-\!O\!-\!A$, daß $\sphericalangle\, AOC = du < 0$ ist, wobei der Winkel, wie der Bogenpfeil angibt, definiert ist als „Winkel des Strahlvektors $\overrightarrow{OC}$ gegen $\overrightarrow{OA}$" und der *so definierte* Winkel durch „du" bezeichnet wird, wobei bei der in der Zeichnung dargestellten Lagebeziehung von $\overrightarrow{OC}$ gegen $\overrightarrow{OA}$ der „Wert" des Winkels du als „negativ" deklariert wurde, in der Zeichnung aber — wie vorstehend gesagt — der positive Wert „$-du$" eingetragen wurde.

Die einzelnen brechenden Flächen und die sich auf diese beziehenden Größen bezeichnen wir — in der Reihenfolge der einzelnen Flächen — durch einen den einzelnen Buchstaben beigesetzten Index $1, 2, 3, \ldots, k$. Wir bezeichnen weiter die *einander entsprechenden* Größen vor und hinter einer brechenden Fläche bzw. vor und nach der Brechung an einer Fläche mit dem gleichen Buchstaben, unterscheiden sie aber dadurch voneinander, daß wir die Größen hinter der Fläche bzw. nach der Brechung mit einem oben angefügten Strich ($'$) versehen. Die einzelnen zwischen den brechenden Flächen befindlichen Medien sind durch ihren Brechungsindex n gekennzeichnet, wobei $n = n(\lambda)$; n ist also eine Funktion der Wellenlänge λ des benutzten Lichtes, ohne daß wir zunächst diese Abhängigkeit des n von λ näher betonen oder berücksichtigen werden.

Wir nehmen zunächst also an, daß wir es mit monochromatischem Licht zu tun haben.[2]

Dann folgt aus der Figur (Abb. 3):

$\overrightarrow{S_1O} = s_1 < 0$ (da der Lichtrichtung entgegengesetzt),

$\overrightarrow{S_2O'} = s_2' > 0$.

$\operatorname{tg} u_1 = \dfrac{t_1}{s_1}$, d. h. $u_1 < 0$,

$\operatorname{tg} u_2' = \dfrac{t_2'}{s_2'}$, d. h. $u_2 > 0$.

d. h. Strahlen, die im Sinne der (von links nach rechts angenommenen) Lichtrichtung von links unten nach rechts oben laufen, bilden mit der Achse negative Winkel und umgekehrt.

---

[1] Es ist demnach zu beachten, daß das — im allgemeinen „*umgekehrte*" — Bild eines in den Abbildungen als vertikaler Pfeil (↑) gezeichneten Objektes hier als dem „Objektpfeil" *gleich*gerichteter Pfeil (↑) gezeichnet ist, so daß die „Pfeilspitze" des „Bildpfeiles" *nicht* „Bild der *Spitze* des Objektpfeiles" ist.

[2] Erst in IV 2f und insbesondere in IX werden wir die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge berücksichtigen.

Das entsprechende gilt für den Winkel φ, den die Flächennormale, der Radius der brechenden Fläche im Einfallspunkt des Strahles, mit der Achse bildet, so daß (in Abb. 3) $\varphi_1 > 0$.

$i_1 = \sphericalangle$ des Strahles (vor der Brechung) mit der Flächennormalen,

$i_1' = \sphericalangle$ des Strahles (nach der Brechung) mit der Flächennormalen.

Da $i_1 = \varphi_1 - u_1$, $i_1' = \varphi_1 - u_1'$, sind in der Abbildung: $i_1 > 0$, $i_1' > 0$.

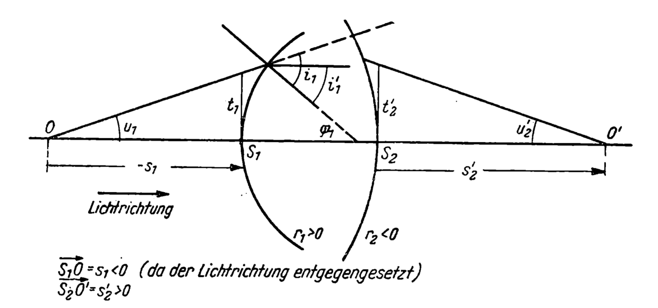


Abb. 3. Zur Bezeichnung der Größen bei der Abbildung eines auf der optischen Achse des abbildenden Systems gelegenen Objektpunktes.

Ist die brechende Fläche gegen das ankommende Licht konkav, so ist $r < 0$ zu setzen. Ist die brechende Fläche gegen das ankommende Licht konvex, so bekommt der Krümmungsradius r ein positives Vorzeichen.

2. Eine paraxiale Abbildungsformel

Es sei

r = Krümmungsradius,

n = Brechungsindex,

i = Einfallswinkel (mit der Flächennormalen).

Um Vorzeichenschwierigkeiten zu vermeiden, ist es bei Formelableitungen oft vorteilhaft, in den zugehörigen Abbildungen einen „virtuellen" Objektpunkt zu benutzen, also einen (außeraxialen oder hier: axialen) Punkt, in dem sich die betrachteten Strahlen treffen *würden*, wenn sie nicht vorher durch Brechung oder Spiegelung eine Richtungsänderung erfahren würden, und dessen $s > 0$ ist (im Sinne unserer Vereinbarung), und den einfallenden Strahl von links oben nach rechts unten verlaufen zu lassen, so daß $u_1 > 0$ ist (s. Abb. 4). Man kann auch — wie dies in Abb. 3 und 5 geschehen — die in der Abbildung auftretenden Längen mit *dem* Vorzeichen versehen, das ihnen zukommt, wenn man ihre Endpunkte von links nach rechts liest, also $\overrightarrow{OS} = -s$, da $s = \overrightarrow{SO}$ definiert ist (vgl. I 1).

Aus der Figur (Abb. 4) folgt[1]:

$$\operatorname{tg} u = \frac{t}{s} \approx \frac{t}{s}, \quad \operatorname{tg} u' = \frac{t}{s'} \approx \frac{t}{s'} \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{SO} = s, \quad \overrightarrow{SO'} = s', \quad \sin\varphi = \frac{t}{r}.$$

Für kleine Winkel (paraxialer Strahlengang) gilt

$$u = \frac{t}{s}, \quad u' = \frac{t}{s'} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{t}{r}.$$

Ferner liest man aus der Figur ab

$$i = \varphi - u, \qquad i' = \varphi - u',$$

also

$$i = t\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right), \qquad i' = t\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right).$$

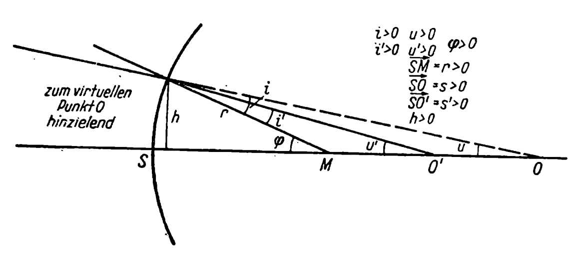


Abb. 4. Zur Ableitung der paraxialen Abbildungsformel. (Statt h lies t).

Für kleine Winkel i und i', mit denen wir es hier nach Voraussetzung (paraxialer Strahlengang) zu tun haben, geht das SNELLIUSsche Brechungsgesetz $n \sin i = n' \sin i'$ über in: $n i = n' i'$.

Setzt man hier die Werte für i und i' ein, so folgt aus ihm

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) = Q \quad \text{(invariant)} \qquad \text{(I 2, 1*)}$$

oder

$$\boxed{\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = (n' - n) \cdot \frac{1}{r} = \frac{n' - n}{r}}. \qquad \text{(I 2, 1)}$$

Dies ist die Abbildungsformel des paraxialen Strahlenganges für eine brechende Fläche.

Folgt dieser brechenden Fläche eine weitere, etwa die $(j+1)$-te, wenn wir die betrachtete als die j-te Fläche eines optischen Systems ansehen und dementsprechend den in vorstehender Gleichung auftretenden Größen den Index j geben, so gelten für die weitere Berechnung des Strahlverlaufs als Ausgangsgrößen die Größen s_{j+1}, r_{j+1}, $n_{j+1} = n'_j$ und n'_{j+1} sowie der Abstand $S_j\, S_{j+1}$

[1] t bezeichne also den Achsenabstand des Strahlschnittpunktes mit der Tangente im Flächenscheitel, t den Achsenabstand des Strahlschnittpunktes mit der Fläche selbst. Für achsen*nahe* Strahlen ist $t = t$.

$= d'_j = \bar{d}_{j+1} = d_{j,j+1}$. Von diesen sind alle außer s_{j+1} als „gegebene Größen" bekannt. s_{j+1} ergibt sich durch die sogenannte „Übergangsformel"

$$s_{j+1} = s'_j - d'_j .$$

Als weitere Übergangsformel können wir noch sofort angeben

$$u_{j+1} = u'_j .$$

Ferner ist, wie hier nur der Vollständigkeit wegen angegeben sei,

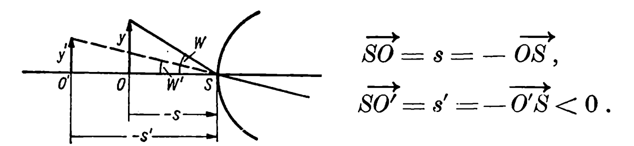
$$t_{j+1} = s_{j+1} \cdot u_{j+1},$$

$$\varphi_{j+1} = \frac{t_{j+1}}{r_{j+1}},$$

$$i_{j+1} = \varphi_{j+1} - u_{j+1}.$$

3. Vergrößerung (Abbildungsmaßstab)

Als „laterale" oder „Seiten-Vergrößerung"[1] β' einer Abbildung bezeichnet man das Verhältnis der Bildgröße (y') zur Größe y des abgebildeten (achsensenkrechten) Objektes, also das Verhältnis $\frac{y'}{y} = \beta'$, den „Abbildungsmaßstab".



$$\overrightarrow{SO} = s = -\overrightarrow{OS},$$

$$\overrightarrow{SO'} = s' = -\overrightarrow{O'S} < 0 .$$

Abb. 5. Zur Ableitung der (paraxialen) Formel für die (laterale) Vergrößerung β'.

Da bei einem aus mehreren — etwa k — brechenden Flächen bestehenden System mit $y = y_1 =$ Objektgröße und $y' = y'_k =$ Bildgröße stets $y'_j = y_{j+1}$ ist, so läßt sich bei jedem optischen System die Größe $\beta' = \frac{y'}{y}$ auch schreiben

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{y'_k}{y_1} = \frac{y'_1}{y_1} \frac{y'_2}{y_2} \frac{y'_3}{y_3} \cdots \frac{y'_k}{y_k} = \beta'_1 \cdot \beta'_2 \cdot \beta'_3 \cdots \beta'_k = \prod_{j=1}^{k} \beta'_j . \qquad \text{(I 3,1)}$$

Es ergibt sich also die Lateralvergrößerung eines optischen Systems gleich dem *Produkt* aus den Lateralvergrößerungen der Teilsysteme, in die man das Gesamtsystem aufgeteilt denken kann. Betrachten wir daher zunächst (als Teilsystem) eine einzige brechende Fläche.

Aus der Figur (Abb. 5) folgt:

$$\operatorname{tg} w = \frac{y}{-s}, \qquad \operatorname{tg} w' = \frac{y'}{-s'} . \qquad \text{(I 3,2)}$$

[1] Neben der so definierten „Vergrößerung" gibt es noch eine Reihe weiterer, anders definierter „Vergrößerungen", z. B. „angulare Vergrößerung", „Mikroskop-Vergrößerung", „Fernrohrvergrößerung", „Lupenvergrößerung" usw., deren Definitionen später bzw. im Anhang gegeben werden.

Für den paraxialen Strahlengang (kleine Winkel) gilt dann

$$w = \frac{y}{-s}, \qquad w' = \frac{y'}{-s'}.$$

Führt man diese Beziehung in das Brechungsgesetz $nw = n'w'$ für die kleinen Winkel w und w' ein, so folgt

$$\frac{n\,y}{-s} = \frac{n'\,y'}{-s'} \qquad \text{oder} \qquad \beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s}.$$

$\beta'_1 = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{n_1}{n'_1} \cdot \frac{s'_1}{s_1}$ ist demnach die Vergrößerung durch die erste brechende Fläche, durch das erste „Teilsystem". Die Vergrößerung durch die zweite brechende Fläche ist entsprechend bestimmt durch:

$$\beta'_2 = \frac{y'_2}{y_2} = \frac{n_2}{n'_2} \cdot \frac{s'_2}{s_2}.$$

k brechende Flächen (Abb. 6) ergeben somit nach (I 3, 1) durch Multiplikation der Einzelvergrößerungen eine Gesamtvergrößerung

$$\beta' = \beta'_1 \cdot \beta'_2 \cdots \beta'_k = \frac{y'_1}{y_1} \cdot \frac{y'_2}{y_2} \cdots \frac{y'_k}{y_k} = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdots n_k}{n'_1 \cdot n'_2 \cdots n'_k} \cdot \frac{s'_1 \cdot s'_2 \cdots s'_k}{s_1 \cdot s_2 \cdots s_k}.$$

Da nun $y_{j+1} = y'_j$ und $n_{j+1} = n'_j$, aber $s_{j+1} = s'_j - d'_j \neq s'_j$ ist, wo $d'_j = \overrightarrow{S_j S_{j+1}}$, so folgt

$$\boxed{\beta' = \beta'_{1\text{ bis }k} = \frac{y'_k}{y_1} = \frac{n_1}{n'_k} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{s'_j}{s_j}}. \qquad \text{(I 3,3)}$$

β' bezeichnet man oft als die laterale (d. h. seitliche) Vergrößerung „des optischen Systems". Doch handelt es sich hier *nicht* um eine Systemkonstante, sondern nur um eine Größe, die die Wirkung des optischen Systems mit Bezug auf einen bestimmten Objektabstand zu berechnen gestattet. (I 3, 3) gibt also die (laterale) Vergrößerung des optischen Systems als Funktion des Objektabstandes oder als Funktion der Lage des axialen Objektpunktes, und zwar für den Fall, daß es sich objektseitig und bildseitig um vorgegebene Medien — die man (bei Systemkonstanten) als „zum System gehörend" anzusehen hat — handelt.

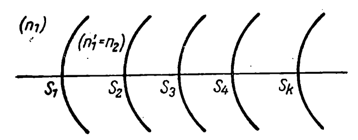


Abb. 6. Schematische Darstellung eines optischen Systems aus mehreren brechenden Flächen.

4. Brennweite

Im Gegensatz zur lateralen Vergrößerung handelt es sich bei der Brennweite — genauer: den Brennweiten — eines optischen Systems um eine Systemkonstante bzw. um Systemkonstanten, sofern man — wie oben gesagt — das objektseitige sowie das bildseitige Medium als zum System gehörig ansieht.

Aus (I 3,3)

$$\beta' = \frac{y'_k}{y_1} = \frac{n_1}{n'_k} \prod_{j=1}^{k} \frac{s'_j}{s_j}$$

folgt nun zunächst

$$y'_k \cdot \frac{s_1}{y_1} = \frac{n_1}{n'_k} \cdot s'_1 \prod_{j=2}^{k} \frac{s'_j}{s_j}.$$

Da nun nach (I 3,2) $\operatorname{tg} w_1 = -\frac{y_1}{s_1}$ ist, kann man schreiben

$$y'_k \cdot \frac{s_1}{y_1} = -\frac{y'_k}{\operatorname{tg} w_1} = \frac{n_1}{n'_k} \cdot s'_1 \prod_{j=2}^{k} \frac{s'_j}{s_j}.$$

Gehe jetzt $s_1 \to \infty$, d. h.: betrachtet man einen unendlich weit entfernten außeraxialen Objektpunkt, so strebt (bei endlichem *Achsen*abstand des Objektpunktes) $\operatorname{tg} w_1 \to 0$. Der rechts stehende Ausdruck ist — wenigstens im allgemeinen — endlich, so daß für $s_1 \to \infty$ mit $\operatorname{tg} w_1 \to 0$ auch $y'_k \to 0$.

[Ausnahme: $s'_k \to \infty$; dagegen bleibt bei $s'_j \to \infty$ für $j < k$ der rechts stehende Ausdruck endlich, da dann auch

$$s_{j+1} \to \infty \qquad \text{und} \qquad \frac{s'_j}{s_{j+1}} = \frac{s_{j+1} + d'_j}{s_{j+1}} \to 1].$$

Es folgt

$$\left(\frac{y'_k \cdot s_1}{y_1}\right)_{s_1 \to \infty} = \left(-\frac{y'_k}{\operatorname{tg} w_1}\right)_{s_1 \to \infty} = \left(\frac{n_1}{n'_k} \cdot s'_1 \prod_{j=2}^{k} \frac{s'_j}{s_j}\right)_{s_1 \to \infty} = -f = f_0,$$

wobei f also für das betreffende System einen bestimmten konstanten Wert hat:

$$f = -f_0 = -\left(\frac{n_1}{n'_k} \cdot s'_1 \prod_{j=2}^{k} \frac{s'_j}{s_j}\right)_{s_1 \to \infty} = -(s_1 \beta')_{s_1 \to \infty}. \qquad \text{(I 4, 1)}$$

Für $s_1 \to \infty$ gilt $\operatorname{tg} w_1 \to 0$. Es verlaufen also die einfallenden Strahlen achsenparallel. Da gleichzeitig das zugehörige $y'_k \to 0$, so treffen sich die achsenparallel einfallenden Strahlen in einem Punkt der Achse, den man als Brenn*punkt* — und zwar als bildseitigen Brennpunkt — bezeichnet.

Die hier — durch (I 4,1) — definierte Größe $f_0 = -f$ bezeichnet man nun als Brenn*weite* des betreffenden Systems, ein Begriff, der erst später (II 1) bezüglich seiner geometrisch-optischen Bedeutung näher definiert wird.

5. Der Helmholtzsche Satz

Wir betrachten jetzt (Abb. 7) zwei Strahlen, die in einer durch den Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche gehenden Ebene, einer sogenannten „Meridianebene" oder meridionalen Ebene liegen, die brechende Fläche in A und A_1 (mit $AA_1 = dB$) und sich gegenseitig in $\bar{O}$ schneiden und deren Nei-

gungswinkel gegen die als „Achse" gewählte Gerade durch den Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche sich um die differentielle Größe du unterscheiden. Ferner wählen wir einen dritten Strahl, der die brechende Fläche gleichfalls in A, die durch $\tilde{O}$ gehende achsensenkrechte Ebene, die unsere Objektebene sei, in $\tilde{\tilde{O}}$ trifft (mit $\tilde{O}\tilde{\tilde{O}} = dy$) und mit $A\tilde{O}$ den Winkel di bildet.

Man schlage um A und $\tilde{O}$ je einen Kreisbogen mit dem Radius $p = |A\tilde{O}|$.

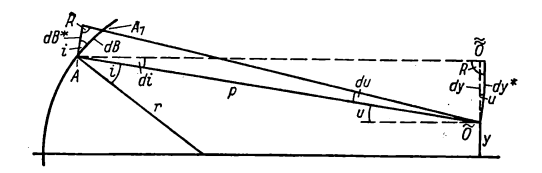


Abb. 7. Zur Ableitung des HELMHOLTZschen Satzes bzw. der HELMHOLTZ-LAGRANGEschen Formel für Meridionalstrahlen.

Aus der Figur folgt nun:

$$du = \frac{dB^*}{p} = \frac{dB \cdot \cos i}{p},$$

ferner

$$di = \frac{dy^*}{p} = \frac{dy \cdot \cos u}{p}.$$

Elimination von p ergibt:

$$p = \frac{dB \cdot \cos i}{du} = \frac{dy \cdot \cos u}{di}.$$

Multiplikation mit

$$\frac{du}{dB \cdot \cos i}$$

liefert

$$\frac{dy \cdot du \cdot \cos u}{di \cdot dB \cdot \cos i} = 1.$$

Entsprechend ergibt sich für die gebrochenen Strahlen

$$\frac{dy' \cdot du' \cdot \cos u'}{di' \cdot dB \cdot \cos i'} = 1.$$

Es ist also

$$\frac{dy \cdot du \cdot \cos u}{di \cdot dB \cdot \cos i} = \frac{dy' \cdot du' \cdot \cos u'}{di' \cdot dB \cdot \cos i'},$$

und demnach auch

$$\frac{n}{n} \cdot \frac{dy \cdot du \cdot \cos u}{di \cdot \cos i} = \frac{n'}{n'} \cdot \frac{dy' \cdot du' \cdot \cos u'}{di' \cdot \cos i'}. \qquad \text{(I 5, 1)}$$

Aus dem Brechungsgesetz $n \sin i = n' \sin i'$ folgt durch Differentiation

$$n \cos i \cdot di = n' \cos i' \cdot di'.$$

Damit ergibt sich aus (I 5,1)

$$n \cdot dy \cdot du \cdot \cos u = n' \cdot dy' \cdot du' \cdot \cos u'$$

(Invariante für die Brechung).

Da allgemein $n'_j = n_{j+1}$, $dy'_j = dy_{j+1}$, $du'_j = du_{j+1}$ und $\cos u'_j = \cos u_{j+1}$, die Größen n', dy', du' und $\cos u'$ also „übergangsinvariant“ sind, so gilt für ein optisches System mit k brechenden Flächen

$$\boxed{n_1 \cos u_1 \, du_1 \, dy_1 = n'_k \cos u'_k \, du'_k \, dy'_k} \,. \qquad \text{(I 5,2)}$$

Dies ist die HELMHOLTZsche Gleichung.

Für paraxiale Strahlen geht $u_1 \to 0$, d. h. $\cos u_1 \approx 1$ und $\cos u'_k \approx 1$. Für den paraxialen Bereich lautet demnach die HELMHOLTZsche Gleichung:

$$\boxed{n_1 \cdot u_1 \cdot y_1 = \text{const} = n'_k \cdot u'_k \cdot y'_k} \,, \qquad \text{(I 5,3)}$$

in der also die Differentiale durch die (sehr kleinen) Größen selbst ersetzt sind. Diese Gleichung bezeichnet man oft als „HELMHOLTZ-LAGRANGEsche Formel“.[1] Aus ihr folgt für das Abbildungsverhältnis des paraxialen Strahlenganges:

$$\boxed{\beta' = \frac{y'_k}{y_1} = \frac{n_1 u_1}{n'_k u'_k}} \,. \qquad \text{(I 5,4)}$$

6. Tiefenvergrößerung (axiale Vergrößerung) und Winkelvergrößerung (Konvergenzverhältnis). Hauptpunkte und Knotenpunkte

Wir behandeln jetzt zwei weitere der oben bereits erwähnten Vergrößerungen, die sogenannte Tiefen- oder axiale Vergrößerung sowie die Winkelvergrößerung, die man auch als Konvergenzverhältnis bezeichnet.

a) *Tiefenvergrößerung*

Es sei O ein Punkt auf der Achse des optischen Systems, von dem ein (räumliches) Strahlenbündel ausgehe, dessen einzelne Strahlen durch die Wirkung des optischen Systems so in ihrer Richtung beeinflußt werden, daß sie nach dem Durchgang durch das optische System wieder einem Punkte, dem „Bildpunkte O' von O“ zustreben, also ein konvergentes Strahlenbündel bilden, dessen Konvergenzpunkt jener Bildpunkt O' von O sei. Man sagt, O werde durch das optische System in O' abgebildet. O und O' heißen „optisch konjugierte Punkte“. Die in O und O' achsensenkrechten Ebenen heißen „optisch konjugiert“ oder

[1] Eine ganz analoge Beziehung gilt — wie man leicht zeigt — auch für ein enges Sagittalstrahlenbüschel und ein in seiner Ebene liegendes Linienelement, so daß

$$\boxed{n_1 \, \vartheta_1 \, y_1 = n'_k \, \vartheta'_k \, y'_k} \,, \qquad \text{(I 5,3*)}$$

wenn ϑ den Öffnungswinkel des Sagittalstrahlenbüschels bezeichnet (s. XIII 4).

kurz: konjugierte Ebenen [bzw. O und O': konjugierte Punkte]. Die HELMHOLTZsche Gleichung wird jetzt entsprechend auf zwei andere achsensenkrechte konjugierte Ebenen $\hat{O}\,\tilde{\hat{O}}$ und $\hat{O}'\,\tilde{\hat{O}}'$ angewendet (Abb. 8).

Aus der Figur folgt (unter Voraussetzung, daß es sich bei $\tilde{O}$ und $\tilde{O}'$ sowie bei $\tilde{\hat{O}}$ und $\tilde{\hat{O}}'$ wieder um der Achse unendlich benachbarte außeraxiale konjugierte Punkte in paarweise konjugierten Ebenen handelt):

$$w_1 = \frac{+\,y_1}{z_1 - s_1}, \qquad w_k = \frac{y_k'}{z_k' - s_k'},$$

$$u_1 = \frac{-\,\hat{y}_1}{z_1 - s_1}, \qquad u_k' = \frac{-\,\hat{y}_k'}{z_k' - s_k'}.$$

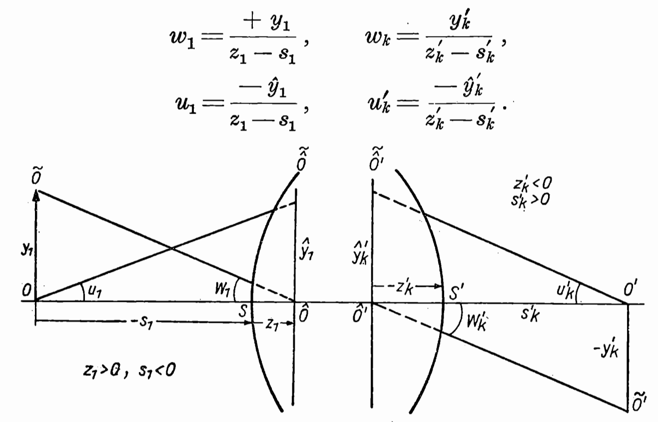


Abb. 8. Zur Ableitung der Formeln der Tiefenvergrößerung sowie der Winkelvergrößerung.

Mit Hilfe der Beziehung (I 5,3)

$$n_1\, u_1\, y_1 = n_k'\, u_k'\, y_k'$$

folgt nun

$$\frac{n_1 \cdot y_1 \cdot \hat{y}_1}{z_1 - s_1} = \frac{n_k' \cdot y_k' \cdot \hat{y}_k'}{z_k' - s_k'}$$

oder

$$\frac{z_k' - s_k'}{z_1 - s_1} = \frac{n_k' \cdot y_k' \cdot \hat{y}_k'}{n_1 \cdot y_1 \cdot \hat{y}_1} = \frac{n_k'}{n_1} \cdot \beta_s' \cdot \beta_z' \tag{I 6,1}$$

mit

$$\frac{y_k'}{y_1} = \beta_s' \qquad \text{und} \qquad \frac{\hat{y}_k'}{\hat{y}_1} = \beta_z'.$$

Läßt man jetzt die beiden Ebenen mehr und mehr zusammenrücken, so folgt:

$$\lim \frac{z_k' - s_k'}{z_1 - s_1} = \lim \frac{\Delta s_k'}{\Delta s_1} = \frac{d s_k'}{d s_1} = \alpha',$$

$$\boxed{\alpha' = \frac{d s_k'}{d s_1} = \frac{n_k'}{n_1} \cdot \beta_s'^2 = \frac{n_k'}{n_1} \beta'^2} \,. \tag{I 6,2}$$

α' bezeichnet man als die *Tiefenvergrößerung*. Sie ist das Verhältnis des Abstandes zweier (benachbarter) Bildebenen zum Abstand der zugehörigen (konjugierten) Objektebenen.

b) *Winkelvergrößerung*

Das Verhältnis

$$\lim_{u_k \to 0} \frac{\operatorname{tg} u_k'}{\operatorname{tg} u_k} = \frac{u_k'}{u_k} = \gamma_k'$$

bezeichnet man als *Konvergenzverhältnis* oder *Winkelvergrößerung* (der k-ten Fläche bzw. des k-ten Teilsystems). Das Konvergenzverhältnis oder die *Winkelvergrößerung* γ' des Gesamtsystems errechnet sich — da ja $u_j' = u_{j+1}$ und demnach

$$\frac{\operatorname{tg} u_k'}{\operatorname{tg} u_1} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\operatorname{tg} u_j'}{\operatorname{tg} u_j}$$

ist — in folgender Weise [bei Berücksichtigung von (I 6,1)]

$$\gamma' = \prod_{j=1}^{k} \gamma_j' = \lim_{u_1 \to 0} \frac{\operatorname{tg} u_k'}{\operatorname{tg} u_1} = \frac{u_k'}{u_1} = \frac{\hat{y}_k'}{z_k' - s_k'} \cdot \frac{z_1 - s_1}{\hat{y}_1} = \frac{n_1}{n_k'} \frac{y_1}{y_k'} \frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_k'} \cdot \frac{\hat{y}_k'}{\hat{y}_1}$$

$$\boxed{\gamma' = \lim_{u_1 \to 0} \frac{\operatorname{tg} u_k'}{\operatorname{tg} u_1} = \frac{n_1\, y_1}{n_k'\, y_k'} = \frac{n_1}{n_k'} \cdot \frac{1}{\beta'}} \,. \qquad \text{(I 6,3)}$$

Zwischen den drei Größen α', β', γ' bestehen also nach (I 6,2) und (I 6,3) die Beziehungen:

$$\boxed{\gamma' \cdot \beta' = \frac{n_1}{n_k'}\,, \qquad \alpha' = \frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{n_k'}{n_1} \beta'^2} \,. \qquad \text{(I 6,4)}$$

c) *Haupt- und Knotenpunkte*

Gewisse, durch bestimmte Eigenschaften optischer Art ausgezeichnete konjugierte Punktepaare der Achse eines optischen Systems bezeichnet man als Hauptpunkte, bestimmte andere optisch konjugierte Punktepaare als Knotenpunkte des betreffenden Systems. Als Hauptpunkte bezeichnet man dasjenige konjugierte Punktepaar auf der Achse, in dem Objekt und Bild gleich groß und gleich gerichtet sind, als Knotenpunkte dasjenige konjugierte Punktepaar auf der Achse, für das die konjugierten Strahlen zueinander parallel sind. Die Haupt- und Knotenpunkte werden also folgendermaßen definiert:

$$\text{Hauptpunkte:} \quad \beta' \,(= \beta_H') = +1\,, \qquad \left(\gamma_H' = \frac{n_1}{n_k'}\right); \qquad \text{(I 6,5)}$$

$$\text{Knotenpunkte:} \quad \gamma' \,(= \gamma_K') = +1\,, \qquad \left(\beta_K' = \frac{n_1}{n_k'}\right). \qquad \text{(I 6,6)}$$

Ist jetzt durch $z_1 = \hat{z}_1$ [$= (s_1)_H$] und $z_k' = \hat{z}_k'$ [$= (s_k')_H$] die Lage der Hauptpunkte gegeben, so muß — da nach (I 6,5) $\beta_z' = +1$ ist — gelten: $\hat{y}_k' = \hat{y}_1$. Dann geht (I 6,3) und (I 6,1) über in

$$\frac{\hat{z}_1 - s_1}{\hat{z}_k' - s_k'} = \frac{n_1}{n_k'} \cdot \frac{1}{\beta_s'} = \gamma_s' \qquad \left(\text{denn} \quad \beta_z' = \frac{\hat{y}_k'}{\hat{y}_1} = 1 \quad \text{nach Voraussetzung}\right).$$

Ferner wird dann

$$\left(\frac{w'_k}{w_1}\right)_H = \frac{\hat{z}_1 - s_1}{\hat{z}'_k - s'_k} \cdot \frac{y'_k}{y_1} = \frac{n_1\, y_1\, \hat{y}_1\, y'_k}{n'_k\, y'_k\, \hat{y}'_k\, y_1} = \frac{n_1}{n'_k} \cdot \frac{\hat{y}_1}{\hat{y}'_k}\,;$$

$$\boxed{\gamma'_H = \frac{n_1}{n'_k}} \qquad \left(\text{denn} \qquad \beta'_z = \frac{\hat{y}'_k}{\hat{y}_1} = 1\right).$$

Es folgt also

$$(w'_k\, n'_k)_{H'} = (w_1\, n_1)_H\,. \tag{I 6,7}$$

Für die objektseitige und bildseitige Achsenneigung der „Hauptpunkt-Strahlen" gilt also die einfache Beziehung:

$$n_1 \sin w_1 \approx n_1\, w_1 = n'_k\, w'_k \approx n'_k \sin w'_k\,, \tag{I 6,8}$$

d. h.: die paraxialen „Hauptpunkt-Strahlen" werden nach dem Brechungsgesetz gebrochen.

Für die Knotenpunkte folgt nun, wenn wir die auf sie bezogenen Größen β' und γ' durch den Index K bezeichnen, nach (I 6, 4) $\beta'_K \cdot \gamma'_K = \frac{n_1}{n'_k}$, also

$$\boxed{\beta'_K = \frac{n_1}{n'_k}}\,, \qquad \text{denn nach (I 6,6) ist ja } \gamma'_K = 1\,.$$

Ist $n_1 = n'_k$, so fallen die Hauptpunkte mit den Knotenpunkten zusammen, da *dann*

$$\gamma'_H = \gamma'_K = 1 \qquad \text{und} \qquad \beta'_K = \beta'_H = 1\,.$$

Es sei noch erwähnt, daß man den Begriff des Konvergenzverhältnisses, das hier als *Grenzwert* für kleine Winkel definiert wurde $\left(\gamma' = \lim\limits_{u_1 \to 0} \frac{\operatorname{tg} u'_k}{\operatorname{tg} u_1}\right)$, häufig auch allgemeiner durch $\gamma' = \frac{\operatorname{tg} u_k}{\operatorname{tg} u_1}$ definiert, und daß mit der hier benutzten, in der geometrischen Lichtoptik allgemein üblichen Vorschrift über die Vorzeichenwahl der objektseitigen bzw. bildseitigen Neigungswinkel der Strahlen gegen die Achse

bei $u_1 \lesseqgtr 0$

$-\infty \lesseqgtr \gamma' < +1$	bedeutet, daß der betreffende Strahl durch das optische System zur Achse „konvergenter" gemacht wird, d. h.: seine Richtung bildseitig einen Winkel u' mit der optischen Achse bildet, der größer ist als der Winkel u seiner objektseitigen Richtung mit der Achse.
$+1 < \gamma' < +\infty$	bedeutet, daß der betreffende Strahl durch das optische System zur Achse „divergenter" gemacht wird.
Für $u_1 > 0$	gelten die umgekehrten Folgerungen.

II. Brennweite und Brechkraft. Abbildungsformeln

1. Die Brechkraft

z_1 und z'_k seien jetzt die Abstände der Hauptpunkte des betrachteten Systems vom ersten bzw. letzten Flächenscheitel. Dann gilt:

$$\overrightarrow{HO} = a = -\overrightarrow{OH} = -(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SH}) = s_1 - z_1(H),$$

$$\overrightarrow{H'O'} = a' = \overrightarrow{H'S'} + \overrightarrow{S'O'} = s'_k - z'_k(H').$$

Damit wird nun bei Berücksichtigung von (I 6,1) und (I 6,5)

$$\frac{-a'}{-a} = \frac{z'_k(H') - s'_k}{z_1(H) - s_1} = \frac{n'_k}{n_1} \cdot \beta'_s,$$

denn nach Voraussetzung ist $\beta'_z = \beta'_H = 1$.

Erweitert man mit s_1, so folgt

$$\frac{z'_k(H') - s'_k}{z_1(H) - s_1} \cdot s_1 = \frac{n'_k}{n_1} \cdot \beta'_s \cdot s_1.$$

Nach (I 3,3) ist

$$\beta'_s = \frac{n_1}{n'_k} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{s'_j}{s_j}.$$

Somit wird

$$s_1 \frac{z'_k(H') - s'_k}{z_1(H) - s_1} = s_1 \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{s'_j}{s_j} = s'_1 \cdot \prod_{j=2}^{k} \frac{s'_j}{s_j}.$$

Wählt man jetzt einen unendlich entfernt gelegenen Objektpunkt, d. h. $s_1 \to \infty$, dann ist $z_1(H) \ll s_1$, kann also gegen s_1 vernachlässigt werden. Man erhält dann

$$\lim_{s_1 \to \infty} s_1 \cdot \frac{z'_k(H') - s'_k}{z_1(H) - s_1} = \lim_{s_1 \to \infty} (s'_k - z'_k(H')) = \left(s'_1 \cdot \prod_{j=2}^{k} \frac{s'_j}{s_j}\right)_{s_1 \to \infty}. \qquad \text{(II 1,1)}$$

Unter I, 4 wurde nun definiert [vgl. (I 4,1)]

$$-\bar{f} = \left(\frac{n_1}{n'_k} \cdot s'_1 \prod_{j=2}^{k} \frac{s'_j}{s_j}\right)_{s_1 \to \infty},$$

wobei $\overrightarrow{HF} = +\bar{f} = -f_0$ die *objektseitige Brennweite* ist, so daß $f_0 = \overrightarrow{FH}$.

Damit wird nun, wenn der zu $s_1 \to \infty$ konjugierte Bildpunkt durch F' bezeichnet und (bildseitiger) Brennpunkt genannt wird,

$$s'_k(F') - z'_k(H') = -\frac{n'_k}{n_1} \cdot \bar{f}\,.$$

Wir setzen:

$$s'_k(F') - z'_k(H') = f' \quad \left(= -\frac{n'_k}{n_1}\bar{f}\right). \tag{II 1,2}$$

Dann ist

$$\overrightarrow{S'_k F'} - \overrightarrow{S'_k H'} = \overrightarrow{H' S'_k} + \overrightarrow{S'_k F'} = \overrightarrow{H' F'} = f'\,.$$

f' ist die *bildseitige Brennweite*, $f' = \overrightarrow{H'F'}$, definiert als Abstand des bildseitigen Brennpunktes (F') vom bildseitigen Hauptpunkt (H') des Systems.

Es ist also nach (I 4,1), (II 1,2)

$$f' = -\frac{n'_k}{n_1} \cdot \bar{f} = \left(s'_1 \prod_{j=2}^{k} \frac{s'_j}{s_j}\right)_{s_1 \to \infty} {}^{1)} \tag{II 1,3}$$

und:

$$\boxed{-\frac{n_1}{\bar{f}} = \frac{n'_k}{f'} = D}\,. \tag{II 1,4}$$

D bezeichnet man als die *Brechkraft* des betreffenden optischen Systems, *die es besitzt, wenn* das der ersten Fläche vorgelagerte Medium den Brechungsindex n_1, das der letzten Fläche folgende Medium den Berechnungsindex n'_k besitzt.

2. Lage von Objekt und Bild

Mit Hilfe der Brennpunkte F, F' und der Lage der Hauptebenen kann man die Lage des Bildes eines kleinen Objektes zeichnerisch bestimmen (Abb. 9), indem man von einem außeraxialen Punkt des Objektes einen achsenparallelen Strahl bis zum Schnitt mit der bildseitigen Hauptebene sowie einen durch den objektseitigen Brennpunkt gehenden Strahl bis zur objektseitigen Hauptebene zeichnet. Von diesen beiden Strahlen geht der erste bildseitig durch den bildseitigen Brennpunkt, während der zweite bildseitig achsenparallel verläuft. Ihr bildseitiger Schnittpunkt ist der Bildpunkt des außeraxialen Objektpunktes, das von ihm auf die Achse gefällte Lot das Bild des achsensenkrechten Objektes. Kennzeichnet man die Entfernungen $\overrightarrow{FO}$ bzw. $\overrightarrow{F'O'}$ des Objektes und

---

[1] Ist bei einem optischen System die erste Fläche eine Planfläche, also $r_1 = \infty$, wie dies z. B. bei Mikroskopobjektiven oft der Fall ist, so ist bei $s_1 = \infty$ auch $s'_1 = s_2 = \infty$. Nun ist $s_2 = s'_1 - d'_1$, also

$$\frac{s'_1}{s_2} = 1 + \frac{d'_1}{s_2} = 1\,, \qquad \text{also} \qquad f' = -\frac{n'_k}{n_1}\bar{f} = \left(s'_2 \prod_{j=3}^{k} \frac{s'_j}{s_j}\right)_{s_1 = \infty}.$$

Bildes von den Brennpunkten $\bar{F}$ bzw. F' mit x bzw. x', so folgt

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{\bar{f}}{x}, \qquad \text{(II 2,1)}$$

also

$$\boxed{x \cdot x' = +\bar{f} \cdot f' = -f_0 f'}\,. \qquad \text{(II 2,2)}$$

Für die Winkelvergrößerung ergibt sich nun nach (I 6,3), (II 2,1), (II 1,3) und (II 2,2)

$$\gamma' = \frac{u'_k}{u_1} = \frac{n_1}{n'_k} \cdot \frac{1}{\beta'}, \qquad \beta' = -\frac{x'}{f'} = -\frac{\bar{f}}{x} \quad \text{und} \quad f' = -\frac{n'_k}{n_1} \cdot \bar{f}$$

$$\gamma' = -\frac{f'}{x'} \cdot \frac{n_1}{n'_k} = \frac{\bar{f}}{x'} \frac{x}{f'}$$

oder

$$\boxed{\gamma' = \frac{\bar{f}}{x'} = \frac{x}{f'} = -\frac{f_0}{x'}} \quad \text{mit} \quad f_0 = -\bar{f}. \qquad \text{(II 2,3)}$$

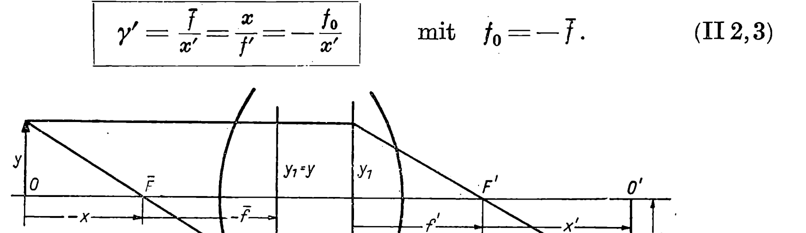


Abb. 9. Zur Ableitung der auf die Brennpunkte als Bezugspunkte bezogenen paraxialen Abbildungsformel $xx' = \bar{f}f'$ sowie einer Formel für die Winkelvergrößerung.

Unter II, 1 hatten wir gefunden

$$\frac{-a'}{-a} = \frac{z'_k(H') - s'_k}{z_1(H) - s_1} = \frac{n'_k}{n_1} \cdot \beta'_s.$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch s'_k, so wird:

$$\frac{1}{s'_k} \cdot \frac{z'_k(H') - s'_k}{z_1(H) - s_1} = \frac{1}{s'_k} \cdot \frac{n'_k}{n_1} \cdot \beta'_s.$$

Mit (I 3,3)

$$\beta'_s = \frac{n_1}{n'_k} \prod_{j=1}^{k} \frac{s'_j}{s_j}$$

wird

$$\frac{1}{s'_k} \cdot \frac{z'_k(H') - s'_k}{z_1(H) - s_1} = \frac{1}{s'_k} \prod_{j=1}^{k} \frac{s'_j}{s_j} = \frac{1}{s_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{s'_j}{s_j}.$$

Fällt nun der Bildpunkt ins Unendliche, d. h. $s'_k \to \infty$, dann ist $z'_k(H') \ll s'_k$ und kann also gegen s'_k vernachlässigt werden. Man erhält dann

$$\left(\frac{1}{s'_k}\cdot\frac{z'_k(H')-s'_k}{z_1(H)-s_1}\right)_{s'_k\to\infty}=\left(\frac{-1}{z_1(H)-s_1}\right)_{s'_k\to\infty}=\left(\frac{1}{s_k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{s'_j}{s_j}\right)_{s'_k\to\infty}$$

Es folgt also, da jetzt $s_1 = s_1(\bar{F})$ wegen $s'_k \to \infty$ und demnach

$$-(z_1(H)-s_1(\bar{F}))_{s'_k\to\infty}=\overrightarrow{HS_1}+\overrightarrow{S_1\bar{F}}=\overrightarrow{H\bar{F}}=+\bar{f}=-f_0, \qquad \text{(II 2,4)}$$

daß — analog zu (II 1,3) — für $\bar{f}$ gilt:

$$\boxed{\bar{f}=\left(s_k\prod_{j=1}^{k-1}\frac{s_j}{s'_j}\right)_{s'_k\to\infty}}. \qquad \text{(II 2,5)}$$

3. Berechnung der Brechkraft

Unter (I 5,4) und (I 6,1) hatten wir gefunden

$$\beta'_s=\frac{n_1\,u_1}{n'_k\,u'_k} \qquad \text{und} \qquad \frac{z'_k-s'_k}{z_1-s_1}=\frac{n'_k\cdot y'_k\cdot \hat{y}'_k}{n_1\cdot y_1\cdot \hat{y}_1}=\frac{n'_k}{n_1}\cdot\beta'_s\cdot\beta'_z.$$

Verknüpfung der beiden Beziehungen ergibt

$$\frac{z'_k-s'_k}{z_1-s_1}=\frac{n'_k}{n_1}\cdot\beta'_s\cdot\beta'_z=\frac{u_1}{u'_k}\cdot\beta'_z,$$

$$\frac{1}{s'_k}\cdot\frac{z'_k-s'_k}{z_1-s_1}=\frac{u_1}{s'_k\cdot u'_k}\cdot\beta'_z.$$

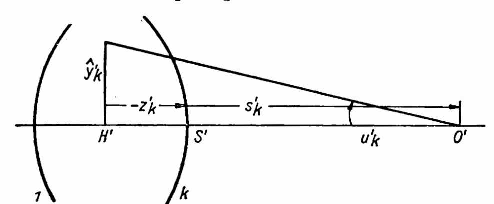


Abb. 10.

Aus der Figur (Abb. 10) folgt unter Voraussetzung kleiner Winkel:

$$\hat{y}'_k = u'_k(s'_k - z'_k), \qquad \text{also} \qquad u'_k s'_k = \hat{y}'_k + u'_k z'_k.$$

Somit folgt:

$$\frac{1}{s'_k}\cdot\frac{z'_k-s'_k}{z_1-s_1}=\frac{u_1}{s'_k\cdot u'_k}\cdot\beta'_z=\frac{u_1}{\hat{y}'_k+u'_k\,z'_k}\cdot\beta'_z.$$

Läßt man jetzt den Bildpunkt ins Unendliche fallen — also $s'_k\to\infty$ gehen —, dann geht $u'_k \to 0$. Ferner kann man dann z'_k gegenüber s'_k vernachlässigen, da

$\hat{z}_k \ll s'_k$. Wir erhalten somit:

$$\left(\frac{-1}{z_1 - s_1}\right)_{s'_k \to \infty} = \frac{u_1}{\hat{y}'_k} \cdot \beta'_z. \qquad \text{(II 3,1)}$$

Da nun hierin $\hat{y}'_k$ wegen $u'_k \to 0$ unabhängig von z'_k und deswegen auch von z_1 ist, kann man jetzt noch $z_1 \to \infty$ gehen lassen. Dann kann man s_1 gegen z_1 vernachlässigen und erhält:

$$-1 = \frac{u_1}{\hat{y}'_k} (\beta'_z \cdot z_1)_{z_1 \to \infty}.$$

Nun war nach (I 4,1)

$$-\bar{f} = \left(\frac{n_1}{n'_k} s'_1 \prod_{j=2}^{k} \frac{s'_j}{s_j}\right)_{s_1 \to \infty} = (\beta'_s \cdot s_1)_{s_1 \to \infty},$$

also auch

$$\bar{f} = -(\beta'_z \cdot z_1)_{z_1 \to \infty}.$$

Somit erhalten wir:

$$+1 = \frac{u_1}{\hat{y}'_k} \cdot \bar{f} \qquad \text{oder} \qquad \frac{u_1}{\hat{y}'_k} = +\frac{1}{\bar{f}}.$$

Dies in (II 3,1) eingesetzt, ergibt

$$\beta'_z = \left(\frac{-\bar{f}}{z_1 - s_1}\right)_{s'_k \to \infty}. \qquad \text{(II 3,2)}$$

Dieser Ausdruck gilt für beliebige z_1.

Wählt man jetzt z_1 so, daß es uns den Abstand „objektseitig erster Linsenscheitel → objektseitiger Hauptpunkt" angibt, so wird $\beta'_z = \beta'_H = +1$ [siehe (I 6,5)].

Dann folgt:

$$\left(\frac{-\bar{f}}{z_1 - s_1}\right)_{\substack{z_1 = z_1(H) \\ s'_k \to \infty}} = \beta'_H = 1,$$

$$\frac{-\bar{f}}{z_1(H) - s_1(F)} = 1,$$

also

$$-\bar{f} = z_1(H) - s_1(F) = \overrightarrow{S_1H} - \overrightarrow{S_1F} = \overrightarrow{FH} = +f_0 = -\bar{f}.$$

Würden wir bei einem optischen System
die „objektseitige Brennweite" durch $f_o (= -\bar{f})$,
die „bildseitige Brennweite" durch $f_b (= +f')$ bezeichnen,
wobei für ein „*Konvex*-System"[1] f_o und $f_b > 0$,
für ein „*Konkav*-System"[2] f_o und $f_b < 0$ ist, so würde (II 2,2) lauten

$$xx' = -f_o f_b = \bar{f} f'. \qquad \text{(II 3,3)}$$

[1] D. h. für ein System, durch das die Konvergenz eines — von einem Punkt ausgehenden — Strahlenbüschels vergrößert bzw. die Divergenz verringert wird.

[2] D. h. für ein System, durch das die Konvergenz eines — von einem Punkt ausgehenden — Strahlenbündels verringert bzw. die Divergenz vergrößert wird.

Entsprechend würde (II 1,4) lauten

$$D = \frac{n'}{f_b} \left(= \frac{n'}{f'} \right) = \frac{n}{f_o} \left(= -\frac{n}{\bar{f}} \right). \qquad \text{(II 3,4)}$$

Die Bezeichnungen f_o und f_b sind aber in der Lichtoptik im allgemeinen nicht üblich, wohl aber in der Elektronenoptik.

4. Brechkraft zusammengesetzter optischer Systeme

Wir fragen jetzt, wie sich die Brechkraft eines aus zwei Einzelsystemen zusammengesetzten Systems aus den Brechkräften der Einzelsysteme berechnen läßt.

In der Figur (Abb. 11) bedeuten:

H_i = objektseitiger Hauptpunkt bzw. Hauptebene des i-ten Systems,
H'_i = bildseitiger Hauptpunkt bzw. Hauptebene des i-ten Systems,
$\bar{F}_i$ = objektseitiger Brennpunkt des i-ten Systems,
$\bar{f}_i$ = objektseitige Brennweite des i-ten Systems,
F'_i = bildseitiger Brennpunkt des i-ten Systems,
f'_i = bildseitige Brennweite des i-ten Systems,
wobei $i = 1, 2$,
F' = bildseitiger Brennpunkt des Gesamtsystems,

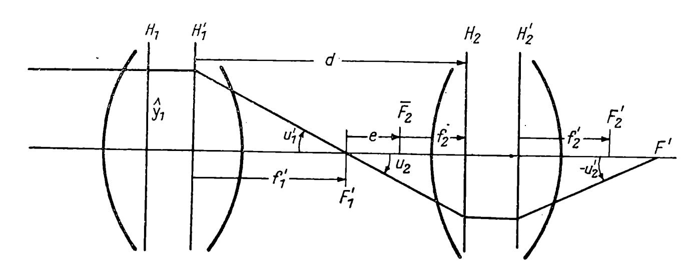


Abb. 11. Zur Berechnung der Brechkraft zusammengesetzter Systeme aus den Brechkräften der Einzelsysteme.

$e = \overrightarrow{F'_1 \bar{F}_2}$ ist die sogenannte „optische Tubuslänge", eine Bezeichnung, die aus der Theorie der Mikroskope stammt und dort zur Unterscheidung des genannten Abstandes [also dort: des objektseitigen Brennpunktes des Okulars vom bildseitigen Brennpunkt des Objektivs] von der *mechanischen* Länge des dort benutzten „*Tubus*", d. h. des Rohres, gebraucht wird, an dessen einem Ende sich das Objektiv, an dessen anderem Ende sich das Okular befindet.

$d = \overrightarrow{H'_1 H_2}$ = „Hauptpunktabstand" der beiden aufeinander folgenden Systeme.

Für einen achsenparallel einfallenden Strahl ist

$$u = u_1 = 0\,, \qquad u_1' = u_2\,, \qquad u_2' = u'\,.$$

Die Winkelvergrößerung des zweiten Teilsystems ist nach (II 2,3) und (II 2,2) gegeben durch:

$$\gamma_2' = \frac{\operatorname{tg} u_2'}{\operatorname{tg} u_1'} = \frac{\operatorname{tg} u_2'}{\operatorname{tg} u_2} = -\frac{f_2'}{x_2'} \cdot \frac{n_2}{n_2'} = \frac{n_2}{n_2'} \cdot \frac{x_2}{-\bar{f}_2} = \frac{n_2}{n_2'} \cdot \frac{(-e)}{-\bar{f}_2}\,,$$

$$\gamma_2' = -\frac{e}{f_2'}\,, \qquad \text{da allgemein} \qquad -f' = \frac{n_k'}{n_1} \cdot \bar{f}\,. \tag{II 4,1}$$

Für die Hauptpunkte des Gesamtsystems H, H' gilt nach (I 6,5)

$$\beta' = +1 \qquad \text{und} \qquad \hat{y} = \hat{y}'\,.$$

Da in unserem Fall (wegen $u_1 = 0$) $\hat{y} = \hat{y}_1$ ist, folgt für die bildseitige Brennweite f' des Gesamtsystems ($f' = \overrightarrow{H'F'}$):

$$f' = \frac{\hat{y}'}{\operatorname{tg} u'} = \frac{\hat{y}_1}{\operatorname{tg} u_2'} = \frac{f_1' \cdot \operatorname{tg} u_1'}{\operatorname{tg} u_2'}\,.$$

Mit (II 4,1)

$$\gamma_2' = \frac{\operatorname{tg} u_2'}{\operatorname{tg} u_1'} = -\frac{e}{f_2'}$$

wird

$$f' = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{e}\,. \tag{II 4,1*}$$

Nun gilt

$$-e = \overrightarrow{F_2 F_1'} = \overrightarrow{F_2 H_2} + \overrightarrow{H_2 H_1'} + \overrightarrow{H_1' F_1'}$$
$$= -\bar{f}_2 - d + f_1'\,.$$

Damit wird:

$$\frac{1}{f'} = -\frac{e}{f_1' \cdot f_2'} = \frac{-d + f_1' - \bar{f}_2}{f_1' \cdot f_2'}$$

und die Brechkraft D_{12} des aus den Teilbrechkräften D_1 und D_2 mit dem Hauptpunktabstand $\overrightarrow{H_1' H_2'} = d$ zusammengesetzten Systems nach (II 3,4)

$$D_{12} = \frac{n_2'}{f'} = \frac{n_2' \, n_1'}{f_1' \cdot f_2'} \left[\frac{f_1'}{n_1'} - \frac{\bar{f}_2}{n_1'} - \frac{d}{n_1'} \right].$$

Setzt man noch den auf „Vakuum (bzw. Luft) reduzierten Abstand" $\dfrac{\overrightarrow{H_1' H_2}}{n_1'}$

$$\frac{\overrightarrow{H_1' H_2}}{n_1'} = \frac{d}{n_1'} = \frac{d}{n_2} = \delta\,, \qquad n_1' = n_2\,,$$

so wird

$$D_{12} = D_1 \cdot D_2 \left[\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} - \delta \right]$$

oder

$$\boxed{D_{12} = D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2} . \qquad \text{(II 4,2)}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man auch schrittweise die Brechkraft des aus n Systemen zusammengesetzten Systems berechnen.[1]

5. Die Abbildungsgleichung für die Lage von Objekt und Bild, bezogen auf beliebige konjugierte Punkte als Bezugspunkte sowie bezogen auf die Hauptpunkte als Bezugspunkte

Es seien (Abb. 12)

$$\left.\begin{array}{llll} \overrightarrow{PO} = b\,, & x = \overrightarrow{FO}\,, & \xi = \overrightarrow{FP}\,, & P, P' \\ \overrightarrow{P'O'} = b'\,, & x' = \overrightarrow{F'O'}\,, & \xi' = \overrightarrow{F'P'}\,, & O, O' \end{array}\right\} \text{konjugierte Punktepaare,}$$

Abb. 12. Zur Ableitung der auf beliebige konjugierte Punkte als Bezugspunkte bezogenen paraxialen Abbildungsformel.

von denen etwa die zueinander optisch konjugierten Punkte P, P' als „Bezugs-Punktepaar" *festgehalten*, das Punktepaar O, O' dagegen als *beliebiges* konjugiertes Punktepaar betrachtet sei. Aus der Figur folgt:

$$x - \xi = b\,, \quad x' - \xi' = b'\,.$$

Damit wird nach (II 2,2)

$$x \cdot x' = (b + \xi) \cdot (b' + \xi') = -\frac{n_k'}{n_1} \bar{f}^2 = -\frac{n_1}{n_k'} f'^2 = \bar{f} f'\,, \qquad \text{(II 5,1)}$$

so daß — da auch

$$\xi \xi' = \bar{f} f'$$

ist,

$$b b' + \xi b' + \xi' b = 0\,,$$

also

$$\boxed{\frac{\xi}{b} + \frac{\xi'}{b'} = -1} . \qquad \text{(II 5,1 a)}$$

Da andererseits nach (II 2,1)

$$\beta' = -\frac{\bar{f}}{x} = -\frac{x'}{f'}\,, \qquad \text{also} \qquad \beta'_\xi = -\frac{\bar{f}}{\xi} = -\frac{\xi'}{f'} = +\frac{n_1}{n_k'} \cdot \frac{\xi'}{\bar{f}}$$

und

$$\xi' = +\frac{n_k'}{n_1} \cdot \bar{f} \cdot \beta'_\xi\,, \qquad -\xi = \frac{\bar{f}}{\beta'_\xi}\,,$$

[1] Siehe z. B. J. Picht, Zur geometrischen Optik inhomogener Medien. Zs. f. Instrkde **53**, 274—282, 1933 [Berechnung der Brechkraft der rotationssymmetrischen inhomogenen Linse des menschlichen Auges durch schrittweise Anwendung von (II 4,2)], sowie J. Picht, Zur Theorie der Elektronenoptik. Zs. f. techn. Phys. **14**, 239—241, 1933.

so folgt aus (II 5,1)

$$x \cdot x' = \left(b - \frac{f}{\beta'_\xi}\right) \cdot \left(b' + \frac{n'_k}{n_1} f \cdot \beta'_\xi\right) = -\frac{n'_k}{n_1} \cdot f^2$$

$$= bb' - \frac{b' f}{\beta'_\xi} + \frac{n'_k}{n_1} \cdot b \cdot f \cdot \beta'_\xi - \frac{n'_k}{n_1} f^2,$$

also wird nach (II 5,1)

$$-bb' = \frac{n'_k}{n_1} \cdot b \cdot f \cdot \beta'_\xi - \frac{b' f}{\beta'_\xi}.$$

Multipliziert man mit $\frac{n_1}{f \cdot b \cdot b'}$, so ergibt sich die auf ein *beliebiges konjugiertes Punktepaar bezogene Abbildungsgleichung*

$$D = \frac{n_1}{-f} = \frac{n'_k}{b'} \cdot \beta'_\xi - \frac{n_1}{b} \cdot \frac{1}{\beta'_\xi} \quad \text{oder, da} \quad \frac{1}{\beta'_\xi} = \beta_\xi,$$

$$\boxed{D = \frac{n'_k}{b'} \cdot \beta'_\xi - \frac{n_1}{b} \cdot \beta_\xi} \,. \tag{II 5,2}$$

Wählt man jetzt speziell für P und P' die Hauptpunkte, dann gilt nach (I 6,5)

$$P \to H, \qquad P' \to H';$$

$$\beta'_\xi = +1, \qquad \beta_\xi = 1;$$

$$b \to a \quad \text{mit} \quad a = \overrightarrow{HO}, \quad b' \to a' \quad \text{mit} \quad a' = \overrightarrow{H'O'}.$$

Damit folgt dann die *auf die Hauptpunkte bezogene Abbildungsgleichung:*

$$D = \frac{n'_k}{a'} - \frac{n_1}{a} \qquad \text{oder} \qquad \boxed{\frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = D}\,, \tag{II 5,3}$$

wenn n ($= n_1$) den Brechungsindex des Objektraumes,
n' ($= n'_k$) den Brechungsindex des Bildraumes bezeichnet.

6. Lage des *bildseitigen* Hauptpunktes eines aus zwei Einzelsystemen zusammengesetzten Gesamtsystems

Es war [vgl. (II 5,3)]

$$D = \frac{n'_k}{a'_k} - \frac{n_1}{a_1} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} a_1 &= \overrightarrow{HO}, \\ a'_k &= \overrightarrow{H'O'}. \end{aligned}$$

Auf die Einzelsysteme des Systems unter II 4 angewendet, lautet diese Beziehung:

$$1) \qquad D_1 = \frac{n'_1}{a'_1} - \frac{n_1}{a_1},$$

wobei

$$a_1 = \overrightarrow{H_1 O} \to \infty \quad (\text{wegen } s_1 \to \infty) \quad \text{und} \quad a'_1 = \overrightarrow{H'_1 O'_1} = \overrightarrow{H'_1 F'_1},$$

ferner

$$2) \qquad D_2 = \frac{n_2'}{a_2'} - \frac{n_2}{a_2},$$

wobei

$$a_2 = \overrightarrow{H_2 O_1'} = \overrightarrow{H_2 F_1'}, \quad a_2' = \overrightarrow{H_2' F'} \quad (\text{wegen } s_1 \to \infty).$$

Es ist also

$$a_2 = \overrightarrow{H_2 O_1'} = \overrightarrow{H_1' O_1'} + \overrightarrow{H_2 H_1'} = a_1' - d.$$

Ferner sei $h' = \overrightarrow{H_2' H'}$, wo H' = bildseitiger Hauptpunkt des Gesamtsystems.

Nun ist

$$\frac{n_2'}{a_2'} = D_2 + \frac{n_2}{a_2} = D_2 + \frac{n_2}{a_1' - d} = D_2 + \frac{1}{\frac{a_1' - d}{n_2}}.$$

Für $a_1 \to \infty$ wird nun $\quad D_1 = \frac{n_1'}{a_1'} = \frac{n_2}{a_1'}, \quad$ da $n_2 = n_1'$.

Beachtet man nun noch $\quad \delta = \frac{d}{n_1'} = \frac{d}{n_2},$

so folgt $\quad \frac{n_2'}{a_2'} = D_2 + \frac{1}{\frac{1}{D_1} - \delta} = D_2 + \frac{D_1}{1 - \delta D_1} = \frac{D_1 + D_2 - \delta D_1 D_2}{1 - \delta D_1},$

also

$$\boxed{\frac{a_2'}{n_2'} = \frac{1 - \delta \cdot D_1}{D_{12}} = \frac{1}{D_{12}} - \frac{\delta \cdot D_1}{D_{12}}}. \qquad \text{(II 6,1)}$$

Nun gilt

$$\frac{f'}{n_2'} = \frac{1}{D_{12}} = \frac{\overrightarrow{H'F'}}{n_2'}.$$

Also wird $\quad -\frac{\delta \cdot D_1}{D_{12}} = \frac{a_2'}{n_2'} - \frac{1}{D_{12}} = \frac{\overrightarrow{H_2' F'}}{n_2'} + \frac{\overrightarrow{F' H'}}{n_2'} = \frac{\overrightarrow{H_2' H'}}{n_2'} = \frac{h'}{n_2'},$

$$\boxed{h' = -\frac{n_2' \delta \cdot D_1}{D_{12}}}. \qquad \text{(II 6,2)}$$

$h' = \overrightarrow{H_2' H'}$ ist der Abstand des *bildseitigen* Hauptpunktes des Gesamtsystems vom *bildseitigen* Hauptpunkt des zweiten Systems.

7. Lage des *objektseitigen* Hauptpunktes eines aus zwei Einzelsystemen zusammengesetzten Gesamtsystems

Wir denken uns den Strahlengang in II 4 derart abgeändert, daß die Strahlen durch den objektseitigen Brennpunkt $\bar{F}$ des Gesamtsystems gehen, d. h., daß das Bild ins Unendliche fällt.

Es ist dann:

$$D_1 = \frac{n_1'}{a_1'} - \frac{n_1}{a_1} \qquad \begin{cases} a_1 = \overrightarrow{H_1F} = \overrightarrow{H_1O_1} \\ a_1' = \overrightarrow{H_1'O_1'}\,, \end{cases}$$

$$D_2 = \frac{n_2'}{a_2'} - \frac{n_2}{a_2} \qquad \begin{cases} a_2 = \overrightarrow{H_2O_1'} = \overrightarrow{H_2O_2} \\ a_2' = \overrightarrow{H_2'O_2'} \to \infty\,. \end{cases}$$

Der Abstand des *objektseitigen* Hauptpunktes H des Gesamtsystems vom *objektseitigen* Hauptpunkt H_1 des ersten Systems sei $h = \overrightarrow{H_1H}$.
Dann ist

$$-f = \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FH_1} + \overrightarrow{H_1H} = -a_1 + h\,, \quad \text{also} \quad a_1 = h + f\,,$$

ferner

$$a_2 = \overrightarrow{H_2O_1'} = \overrightarrow{H_2H_1'} + \overrightarrow{H_1'O_1'} = a_1' - d\,.$$

Damit wird

$$\frac{n_1'}{a_1'} = D_1 + \frac{n_1}{a_1} = D_1 + \frac{n_1}{h+f}\,.$$

$\left(\text{Wegen } a_2' \to \infty \text{ wird } D_2 = -\frac{n_2}{a_2}\right)$.

Also wird

$$\frac{n_1'}{a_1'} = D_1 + \frac{n_1}{h+f} = \frac{n_1'}{f_1'} + \frac{n_1}{h+f}$$

oder

$$\frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{n_1}{n_1'} \cdot \frac{1}{h+f} = \frac{n_1' h + n_1' f + n_1 f_1'}{n_1' \cdot f_1' (h+f)}\,.$$

Da $a_2 = a_1' - d$ ist, wird

$$a_2 = \frac{n_1' f_1' (h+f)}{n_1' h + n_1' f + n_1 f_1'} - d = \frac{n_1' f_1' (h+f) - n_1' (h+f)\, d - n_1 f_1' d}{n_1' (h+f) + n_1 f_1'}\,.$$

Damit wird, da $a_2' \to \infty$ (s. o.),

$$D_2 = -\frac{n_2}{a_2} = -\frac{n_1'}{a_2} = \frac{-n_1' [n_1' (h+f) + n_1 f_1']}{n_1' f_1' (h+f) - n_1' (h+f)\, d - n_1 f_1' d}$$

$$= -\frac{n_1' (h+f) + n_1 f_1'}{f_1' (h+f) - (h+f)\, d - \frac{n_1}{n_1'} f_1' d}$$

$$= -\frac{n_1' (h+f) + n_1 f_1'}{f_1' (h+f) - (h+f)\, d - n_1 d \cdot \frac{1}{D_1}}\,, \qquad \text{denn} \qquad \frac{f_1'}{n_1'} = \frac{1}{D_1'}\,.$$

$$D_2 f_1' (h+f) - D_2 (h+f)\, d - n_1 d \cdot \frac{D_2}{D_1} = -n_1' (h+f) - n_1 f_1'\,,$$

also

$$h + f = \frac{n_1 d \cdot \frac{D_2}{D_1} - n_1 f_1'}{D_2 (f_1' - d) + n_1'}\,.$$

Da nun $\delta = \frac{d}{n_1'}$ und $\frac{f_1'}{n_1'} = \frac{1}{D_1}$ ist, folgt nach Zähler- und Nennerdivision durch n_1':

$$h + \bar{f} = \frac{n_1\left(\delta \cdot \frac{D_2}{D_1} - \frac{1}{D_1}\right)}{D_2\left(\frac{1}{D_1} - \delta\right) + 1} = -\frac{n_1 D_1\left(\frac{1}{D_1} - \delta \cdot \frac{D_2}{D_1}\right)}{D_2 - \delta \cdot D_1 D_2 + D_1},$$

$$-\bar{f} - h = +\frac{n_1(1 - \delta \cdot D_2)}{D_{12}} = \frac{n_1}{D_{12}} - n_1 \cdot \frac{\delta \cdot D_2}{D_{12}}.$$

Da nun $-\bar{f} = \frac{n_1}{D_{12}}$ ist, folgt für $\overrightarrow{H_1 H} = h$, den Abstand des *objektseitigen* Hauptpunktes des Gesamtsystems vom *objektseitigen* Hauptpunkt des ersten der beiden Teilsysteme:

$$\boxed{h = n_1 \cdot \frac{\delta \cdot D_2}{D_{12}}}. \qquad \text{(II 7,1)}$$

Setzt man — zu $\frac{d}{n_1'} = \frac{d}{n_2} = \delta$ analog — noch $\frac{h}{n_1} = \eta$ und $\frac{h'}{n_2'} = \eta'$, so gelten die Beziehungen

$$\boxed{\frac{\eta}{\delta} = \frac{D_2}{D} \quad \text{und} \quad \frac{\eta'}{\delta} = -\frac{D_1}{D}}. \qquad \text{(II 7,2)}$$

8. Die Hauptpunkte einer brechenden Fläche

Bei nur einer brechenden Fläche fallen die Hauptpunkte im Flächenscheitel zusammen, denn die hierfür geltende Abbildungsgleichung $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} = D$ geht mit $s = a$, $s' = a'$ in die auf die Hauptpunkte bezogene Abbildungsgleichung $\frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = D$ über.

Folgerung hieraus:

Bei einer einzelnen brechenden Fläche fallen die Hauptpunkte also beide in den Flächenscheitel, d. h. in den Schnitt der Fläche mit der optischen Achse. Da aber bei Einzelflächen jede durch den Krümmungsmittelpunkt gehende Gerade als optische Achse angesehen werden kann (die optische Achse ist — bei mehr als einer Fläche — die Verbindungsgerade der Krümmungsmittelpunkte), so ist die Hauptpunkts*fläche* nicht eine achsensenkrechte Ebene, sondern sie ist gekrümmt, und zwar fällt sie mit der brechenden Fläche zusammen. Auch bei Systemen aus mehreren brechenden Flächen erhalten wir aus der Definitionseigenschaft der Hauptpunkte ($\beta' = 1$) zwei (im allgemeinen nicht zusammenfallende) gekrümmte Hauptpunktsflächen, wenn wir die Definitionseigenschaft auf endliche Objekt- bzw. Bildgröße anwenden.

III. Eine allgemeine Abbildungsformel

Wir leiten nachstehend noch eine sehr allgemeine Abbildungsformel ab, die zwar in erster Linie theoretisches Interesse besitzt, *die es* dafür aber andererseits *erlaubt,* durch bestimmte *zweckentsprechende* Spezialisierungen für alle möglichen paraxialen Größen geeignete Formelausdrücke zu gewinnen.

1. Ableitung der allgemeinen Abbildungsformel

Wir betrachten ein zentriertes optisches System, d. h.: alle Krümmungsmittelpunkte der einzelnen brechenden Flächen liegen auf einer Geraden, der sogenannten Hauptachse.

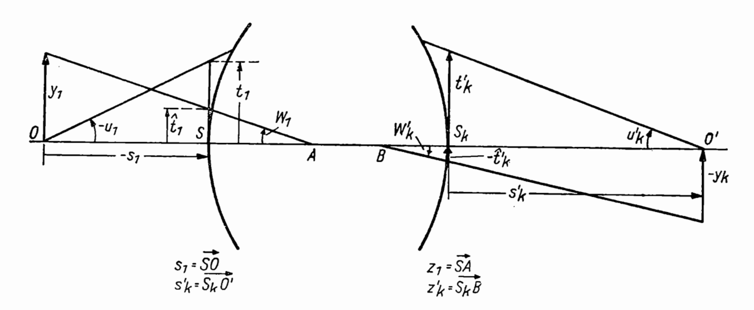


Abb. 13. Zur Ableitung der allgemeinen Abbildungsformel.

Aus der Figur (Abb. 13) — in der O, O' sowie A, B konjugierte Punktepaare seien — folgt:

$$u_1 = \frac{t_1}{s_1}, \qquad u'_k = \frac{t'_k}{s'_k} \qquad \text{(paraxialer Strahl)};$$

$$w_1 = \frac{\hat{t}_1}{z_1}, \qquad w'_k = \frac{\hat{t}'_k}{z'_k}.$$

Nun gilt nach (I 5,3) $\qquad n_1 u_1 y_1 = n'_k u'_k y'_k .$

Da nun

$$y_1 = (z_1 - s_1)\, w_1 , \qquad y'_k = (z'_k - s'_k)\, w'_k$$

ist, wird $\qquad n_1 u_1 (z_1 - s_1)\, w_1 = n'_k u'_k (z'_k - s'_k)\, w'_k ,$

also
$$n_1 \cdot \frac{z_1 - s_1}{z_1 \cdot s_1} \cdot t_1 \hat{t}_1 = n'_k \frac{z'_k - s'_k}{z'_k \cdot s'_k} t'_k \hat{t}'_k ,$$

$$\frac{z'_k - s'_k}{z'_k \cdot s'_k} = \frac{n_1}{n'_k} \cdot \frac{t_1 \hat{t}_1}{t'_k \hat{t}'_k} \frac{z_1 - s_1}{z_1 \cdot s_1} . \qquad \text{(III 1,1)}$$

Ferner gilt:

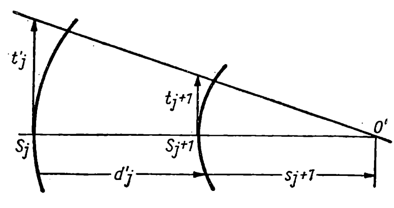


Abb. 14. Zur Berechnung von „Übergangsgrößen".

$$s'_j = \overrightarrow{S_j O'},$$
$$s_{j+1} = \overrightarrow{S_{j+1} O'},$$
$$d'_j = \overrightarrow{S_j S_{j+1}} ,$$
$$s_{j+1} = \overrightarrow{S_j O'} + \overrightarrow{S_{j+1} S_j}$$
$$= s'_j - d'_j .$$

Aus der Figur (Abb. 14) folgt:

$$\frac{t_{j+1}}{t'_j} = \frac{s_{j+1}}{s'_j} = \frac{s'_j - d'_j}{s'_j} , \qquad \text{(III 1,2)}$$

$$1 - \frac{t_{j+1}}{t'_j} = \frac{d'_j}{s'_j}$$

oder auch
$$1 - \frac{t_j}{t'_{j-1}} = \frac{d'_{j-1}}{s'_{j-1}} . \qquad \text{(III 1,3)}$$

Ebenso muß sich eine Beziehung zwischen den z und den $\hat{t}$ ergeben:

$$1 - \frac{\hat{t}_j}{\hat{t}'_{j-1}} = \frac{d'_{j-1}}{z'_{j-1}} . \qquad \text{(III 1,4)}$$

Aus (III 1,3) und (III 1,4) folgt:

$$\frac{\hat{t}_j}{\hat{t}'_{j-1}} - \frac{t_j}{t'_{j-1}} = d'_{j-1} \left(\frac{1}{s'_{j-1}} - \frac{1}{z'_{j-1}} \right) .$$

Mit $\frac{\hat{t}'_{j-1}}{t_j}$ multipliziert, ergibt sich

$$\frac{\hat{t}_j}{t_j} - \frac{\hat{t}'_{j-1}}{t'_{j-1}} = \frac{\hat{t}'_{j-1}}{t_j} d'_{j-1} \cdot \frac{z'_{j-1} - s'_{j-1}}{s'_{j-1} \cdot z'_{j-1}} .$$

Unter Berücksichtigung von (III 1,1) folgt hieraus

$$\frac{\hat{t}_j}{t_j} = \frac{\hat{t}'_{j-1}}{t'_{j-1}} + \frac{n_1}{n'_{j-1}} \cdot \frac{t_1 \hat{t}_1}{t_j t'_{j-1}} d'_{j-1} \frac{z_1 - s_1}{z_1 \cdot s_1} .$$

Die Gleichung gilt von Fläche zu Fläche, d. h. für alle Werte $j = 2, 3, \ldots, k$. Bildet man die Summe über alle diese Gleichungen (für $j = 2$ bis $j = k$), so

folgt, da für achsennahe Strahlen $t_j = t'_j$ ($= t_j$) und $\hat{t}_j = \hat{t}'_j$ ($= \hat{t}_j$) ist:

$$\frac{\hat{t}_k}{t_k} = \frac{\hat{t}_1}{t_1} + n_1\, t_1\, \hat{t}_1 \cdot \frac{z_1 - s_1}{z_1 \cdot s_1} \cdot \sum_{j=2}^{k} \frac{d'_{j-1}}{n'_{j-1} \cdot t_j\, t_{j-1}}.$$

Mit

$$\frac{d'_{j-1}}{n'_{j-1}} = \delta'_{j-1} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{d}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\delta'_j}{\frac{t_j}{t_1} \cdot \frac{t_{j+1}}{t_1}} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\delta_j}{\frac{t_j}{t_1} \cdot \frac{t_{j+1}}{t_1}}$$

wird

$$\frac{\hat{t}_k}{\hat{t}_1} = \frac{t_k}{t_1} + n_1 \frac{t_k}{t_1} \cdot \frac{z_1 - s_1}{z_1 \cdot s_1} \cdot \mathfrak{d}_k. \tag{III 1,4*}$$

Aus (III 1,1) folgt weiter:

$$\frac{\hat{t}_1}{\hat{t}_k} = \frac{n'_k}{n_1} \frac{z_1 \cdot s_1}{z_1 - s_1} \cdot \frac{z'_k - s'_k}{z'_k \cdot s'_k} \cdot \frac{t_k}{t_1}.$$

Multipliziert man die beiden letzten Gleichungen miteinander, so folgt

$$1 = \frac{n'_k}{n_1} \cdot \frac{z_1 \cdot s_1}{z_1 - s_1} \cdot \frac{z'_k - s'_k}{z'_k \cdot s'_k} \left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2 + \frac{n'_k (z'_k - s'_k)}{z'_k \cdot s'_k} \left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2 \mathfrak{d}_k.$$

Daraus erhalten wir die allgemeinste Abbildungsformel, die wohl von Berek erstmalig abgeleitet wurde:

$$\boxed{\frac{1}{\frac{1}{s'_k} - \frac{1}{z'_k}} = \frac{n'_k}{n_1} \cdot \left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2 \left[\frac{1}{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{z_1}} + n_1\, \mathfrak{d}_k\right].} \tag{III 1,5}$$

In dieser Abbildungsformel sind die $\frac{t_k}{t_1}$, aber nicht mehr die $\frac{\hat{t}_k}{\hat{t}_1}$ enthalten. Ist der Strahlengang für den Objektabstand s_1 durchgerechnet, sind also $\frac{t_k}{t_1}$ und alle übrigen $\frac{t_j}{t_1}$ für die Berechnung von $\mathfrak{d}_k$ bekannt, so kann für jeden anderen Objektabstand z_1 der Bildabstand z'_k berechnet werden. Die $\frac{t_j}{t_1}$ ergeben sich aus der paraxialen Durchrechnung, denn es gilt nach (III 1,2):

$$\frac{t_{j+1}}{t_j} = \frac{s_{j+1}}{s'_j}.$$

Daraus folgt

$$\frac{t_j}{t_1} = \prod_{2}^{j} \frac{t_\mu}{t_{\mu-1}} = \prod_{2}^{j} \frac{s_\mu}{s'_{\mu-1}} = \prod_{1}^{j-1} \frac{s_{\mu+1}}{s'_\mu}. \tag{III 1,6}$$

2. Anwendungen der allgemeinen Abbildungsgleichung

a) *Berechnung der Brennpunkte* in bezug auf die Linsenscheitel:

Es sei für irgendein s die s-Durchrechnung vorausgesetzt. Ferner sei $z'_k \to \infty$ angenommen, dann ist $z_1 = z_1(\bar{F}) = \overrightarrow{S_1 F}$ der Abstand des objektseitigen Brennpunktes des Systems vom ersten Flächenscheitel.

Aus der allgemeinen Abbildungsgleichung (III 1,5) folgt mit $z'_k \to \infty$:

$$s'_k = \frac{n'_k}{n_1}\left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2 \left[\frac{1}{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{z_1(\bar{F})}} + n_1 \mathfrak{d}_k\right]$$

oder

$$\frac{1}{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{z_1(\bar{F})}} = \frac{n_1}{n'_k} \cdot s'_k \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2 - n_1 \mathfrak{d}_k\,,$$

also

$$z_1(\bar{F}) = \frac{1}{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{\frac{n_1}{n'_k} \cdot s'_k \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2 - n_1 \mathfrak{d}_k}}\,. \tag{III 2,1}$$

Geht jetzt auch $s'_k \to \infty$, so rückt das Objekt in den Brennpunkt, d. h.: es wird

$$z_1(\bar{F}) = (\overrightarrow{S_1 F} = \overrightarrow{S_1 O}) = s_1\,.$$

Dies folgt auch aus der obigen Beziehung.

Für $z_1 \to \infty$ ergibt sich entsprechend aus (III 1,5)

$$z'_k(F') = \frac{1}{\frac{1}{s'_k} - \frac{1}{s_1 + n_1 \mathfrak{d}_k} \cdot \frac{n_1}{n'_k} \cdot \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2}\,. \tag{III 2,2}$$

Für $s_1 \to \infty$ ergibt sich hieraus — wie es sein muß —

$$z'_k(F') = \overrightarrow{S'F'} = s'_k\,.$$

b) *Berechnung der Brechkraft:*

Für die laterale Vergrößerung galt nach (II 2,1) $\beta'_s = -\frac{x'}{f'}$, wobei

$$x' = \overrightarrow{F'O'} = \overrightarrow{S_k O'} + \overrightarrow{F'S_k} = s'_k - z'_k(F')\,,$$

$$z'_k = \overrightarrow{S_k F'}\,, \qquad f' = \overrightarrow{H'F'}\,.$$

Ferner gilt:

$$\beta'_s = \frac{n_1 u_1}{n'_k u'_k} \qquad \text{[vgl. (I 5,4)]}.$$

Da nun $u_1 = \frac{t_1}{s_1}$, $u'_k = \frac{t_k}{s'_k}$ ist, wird $\beta' = \frac{n_1}{n'_k} \cdot \frac{t_1}{t_k} \cdot \frac{s'_k}{s_1}$.

Aus $\beta'_s = -\frac{x'}{f'}$ folgt

$$f' = -\frac{x'}{\beta'_s} = \frac{z'_k(F') - s'_k}{\frac{n_1}{n'_k}\cdot\frac{s'_k}{s_1}\cdot\frac{t_1}{t'_k}} = z'_k(F')\,\frac{n'_k}{n_1}\cdot\frac{t_k}{t_1}\left(\frac{1}{s'_k} - \frac{1}{z'_k}\right)\cdot s_1\,,$$

also

$$\frac{n'_k}{f'} = \frac{n_1}{s_1}\cdot\frac{t_1}{t_k}\cdot\frac{1}{z'_k}\cdot\frac{1}{\frac{1}{s'_k} - \frac{1}{z'_k}}\,.$$

Nach (III 2,2) gilt

$$z'_k(F') = \frac{1}{\frac{1}{s'_k} - \frac{1}{s_1 + n_1\mathfrak{d}_k}\cdot\frac{n_1}{n'_k}\cdot\left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2}\,.$$

Für $\frac{1}{\frac{1}{s'_k} - \frac{1}{z'_k}}$ setzen wir den Wert aus der Abbildungsformel (III 1,5) ein.

Dann folgt

$$\frac{n'_k}{f'} = \frac{n_1}{s_1}\cdot\frac{t_1}{t_k}\left[\frac{1}{s'_k} - \frac{1}{s_1 + n_1\mathfrak{d}_k}\,\frac{n_1}{n'_k}\left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2\right]\frac{n'_k}{n_1}\left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2\left[\frac{1}{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{z_1}} + n_1\mathfrak{d}_k\right].$$

Für $z_1 \to \infty$ geht dies über in

$$\frac{n'_k}{f'} = \frac{n_1}{s_1}\cdot\frac{t_1}{t_k}\left[\frac{1}{s'_k} - \frac{1}{s_1 + n_1\mathfrak{d}_k}\cdot\frac{n_1}{n'_k}\left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2\right]\cdot(s_1 + n_1\mathfrak{d}_k)\,\frac{n'_k}{n_1}\cdot\left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2,$$

$$\frac{n'_k}{f'} = \frac{n'_k\cdot t_k}{s_1\cdot t_1}\left[\frac{s_1 + n_1\mathfrak{d}_k}{s'_k} - \frac{n_1}{n'_k}\left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2\right] \qquad \text{(III 2,3)}$$

$$= \frac{n'_k\cdot t_k}{s'_k\cdot t_1}\left(1 + \frac{n_1}{s_1}\mathfrak{d}_k\right) - \frac{\frac{n_1}{s_1}}{\frac{t_k}{t_1}}\,.$$

Es ist also

$$D = \frac{n'_k}{f'} = \frac{n'_k}{s'_k}\cdot\frac{t_k}{t_1}\left(1 + \frac{n_1}{s_1}\mathfrak{d}_k\right) - \frac{\frac{n_1}{s_1}}{\frac{t_k}{t_1}}\,. \qquad \text{(III 2,4)}$$

Wenn die Strahlen parallel einfallen (d. h. $s_1 \to \infty$), so wird:

$$D = \frac{n'_k}{f'} = \frac{n_1}{-f} = \lim_{s_1\to\infty}\frac{n'_k}{s'_k}\cdot\frac{t_k}{t_1}\,.$$

Da nun nach (III 1,6)

$$\frac{t_k}{t_1} = \prod_1^{k-1} \frac{s_{\mu+1}}{s'_\mu}$$

ist, wird

$$D = \frac{n'_k}{f'} = \frac{n_1}{-\bar{f}} = \left(\frac{n'_k}{s'_k} \prod_1^{k-1} \frac{s_{\mu+1}}{s'_\mu} \right)_{s_1 \to \infty},$$

$$-\bar{f} = \frac{n_1}{n'_k} \left(s'_k \prod_{\mu=1}^{k-1} \frac{s'_\mu}{s_{\mu+1}} \right)_{s_1 \to \infty} = \left(\frac{n_1}{n'_k} \cdot s'_1 \prod_2^k \frac{s'_\mu}{s_\mu} \right)_{s_1 \to \infty}. \qquad \text{(III 2,4a)}$$

Dieser Ausdruck wurde schon in I 4 unter ganz anderen Gesichtspunkten abgeleitet.

c) *Hauptpunkte:*

Es gilt

$$f' = \overrightarrow{H'F'} = \overrightarrow{S_k F'} + \overrightarrow{H'S_k} = z'_k(F') - z'_k(H'),$$

denn

$$\overrightarrow{S_k H'} = z'_k(H') \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{S_k F'} = z'_k(F').$$

Nach (III 2,2) gilt nun

$$z'_k(F') = \frac{s_1 + n_1 \mathfrak{d}_k}{\dfrac{s_1 + n_1 \mathfrak{d}_k}{s'_k} - \dfrac{n_1}{n'_k}\left(\dfrac{t_1}{t_k}\right)^2}$$

und nach (III 2,3):

$$\frac{n'_k}{f'} = \frac{n'_k}{s_1} \cdot \frac{t_k}{t_1} \left[\frac{s_1 + n_1 \mathfrak{d}_k}{s'_k} - \frac{n_1}{n'_k} \left(\frac{t_1}{t_k} \right)^2 \right].$$

Damit wird

$$z'_k(H') = z'_k(F') - f' = f' \left(\frac{z'_k(F')}{f'} - 1 \right),$$

also

$$\underline{z'_k(H') = f' \left[\frac{t_k}{t_1} \left(1 + \frac{n_1}{s_1} \mathfrak{d}_k \right) - 1 \right].} \qquad \text{(III 2,5)}$$

Ebenso ergibt sich:

$$+\bar{f} = \overrightarrow{H\bar{F}} = \overrightarrow{S_1 \bar{F}} + \overrightarrow{HS_1} = z_1(\bar{F}) - z_1(H),$$

denn

$$z_1(\bar{F}) = \overrightarrow{S_1 \bar{F}} \qquad \text{und} \qquad z_1(H) = \overrightarrow{S_1 H}.$$

Also

$$z_1(H) = z_1(\bar{F}) - \bar{f}.$$

In (III 2,1) haben wir einen Ausdruck für $z_1(\overline{F})$ gefunden, der — noch umgeformt — sich schreiben läßt:

$$z_1(\overline{F}) = \frac{s_1\left\{\frac{n_1}{n_k'} s_k' \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2 - n_1 \mathfrak{d}_k\right\}}{-s_1 \frac{t_1}{t_k} \cdot \frac{s_k'}{n_k'}\left[\frac{t_k}{t_1} \cdot \frac{n_k'}{s_k'}\left(1 + \frac{n_1}{s_1}\mathfrak{d}_k\right) - \frac{n_1}{s_1} \cdot \frac{t_1}{t_k}\right]}$$

und entsprechend (III 2,4) für D:

$$D = \frac{n_1}{-\overline{f}} = \frac{n_k'}{s_k'} \cdot \frac{t_k}{t_1}\left(1 + \frac{n_1}{s_1}\mathfrak{d}_k\right) - \frac{n_1}{s_1} \cdot \frac{t_1}{t_k}.$$

Damit wird

$$z_1(\overline{F}) = +\left(\frac{t_1}{t_k} - \frac{n_k'}{s_k'} \cdot \frac{t_k}{t_1}\mathfrak{d}_k\right)\overline{f}, \qquad \text{(III 2, 6)}$$

und folglich ergibt sich, da ja $z_1(H) - z_1(\overline{F}) = -\overline{f}$, d. h.:

$$z_1(H) = -\overline{f}\left(\frac{z_1(\overline{F})}{-\overline{f}} + 1\right)$$

ist,

$$\underline{z_1(H) = -\overline{f}\left[\frac{n_k'}{s_k'} \cdot \frac{t_k}{t_1}\mathfrak{d}_k - \frac{t_1}{t_k} + 1\right].} \qquad \text{(III 2,7)}$$

Für den Abstand der beiden Hauptpunkte des Systems folgt:

$$\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{HS_1} + \overrightarrow{S_1S_k} + \overrightarrow{S_kH'}$$

H = objektseitiger Hauptpunkt,
H' = bildseitiger Hauptpunkt,
$\overrightarrow{S_1H} = z_1(H)$,
$\overrightarrow{S_1S_k} = \sum_{j=1}^{k-1} \overrightarrow{S_j S_{j+1}}, \quad \overrightarrow{S_jS_{j+1}} = d_j'$,
$\overrightarrow{S_kH'} = z_k'(H')$.

Demnach:
$$\overrightarrow{HH'} = -z_1(H) + z_k'(H') + \sum_{j=1}^{k-1} d_j'$$

und mit (III 2,5) und (III 2, 7)

$$\overrightarrow{HH'} = -\overline{f}\left[-\left(\frac{n_k'}{s_k'} \cdot \frac{t_k}{t_1}\mathfrak{d}_k - \frac{t_1}{t_k} + 1\right) + \frac{n_k'}{n_1}\left(\frac{t_k}{t_1} + \frac{t_k}{t_1} \cdot \frac{n_1}{s_1}\mathfrak{d}_k - 1\right)\right] + \sum_1^{k-1} d_j',$$

also

$$\overrightarrow{HH'} = \sum_{j=1}^{k-1} d_j' - \overline{f}\left[n_k' \frac{t_k}{t_1}\mathfrak{d}_k\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_k'}\right) + \left(\frac{n_k'}{n_1} - \frac{t_1}{t_k}\right)\left(\frac{t_k}{t_1} - 1\right)\right]. \qquad \text{(III 2, 8)}$$

$\overline{f}$ ließ sich ebenfalls bereits durch die Werte der einen Strahlendurchrechnung angeben [siehe (III 2,4a)], so daß damit auch der Abstand $\overrightarrow{HH'}$ der beiden Hauptpunkte des Systems mit (III 1,5) berechenbar ist bzw. in (III 1,5), der allgemeinen Abbildungsformel, als Spezialfall enthalten ist.

IV. Strahlenbündel endlicher Öffnung bzw. endlicher Hauptstrahlneigung gegen die Achse des abbildenden Systems

1. Vorbemerkungen

Die bisher durchgeführten Betrachtungen und die aus ihnen gewonnenen Formeln bezogen sich auf paraxialen Strahlengang, d. h. auf „Strahlenoptik erster Ordnung", da bisher alle Größen, die klein von zweiter und höherer Ordnung sind, konsequent vernachlässigt wurden. Wir wurden so zu den Grundformeln und Grundgrößen — den „Kardinalgrößen" oder „Kardinalelementen" — optischer Systeme geführt.

In der praktischen Anwendung optischer Systeme handelt es sich aber fast stets um Strahlenbündel größerer Öffnung und um Strahlen größerer Neigung gegen die Achse des optischen Systems bzw. gegen die Flächennormalen der brechenden Flächen.

Dabei kann die „Öffnung" des abbildenden Strahlenbündels (bzw. bei mehreren Objektpunkten: der abbildenden Strahlenbündel) bei einfachen Linsen z. B. allein durch die Größe (— also durch die Berandung —) der Linse bedingt sein. Im allgemeinen aber, besonders bei komplizierten optischen Systemen, wird die Öffnung der abbildenden Strahlenbündel, also der für die Abbildung tatsächlich ausgenutzten Strahlen der vom abzubildenden Objektpunkt ausgehenden Strahlengesamtheit, durch besondere „Blenden" bestimmt. Dies sind lichtundurchlässige materielle Scheiben (oder doch scheibenähnliche Anordnungen), die eine — im allgemeinen kreisrunde und zur Systemachse zentrische — Öffnung besitzen, so daß nur die auf diese *Öffnung* treffenden Strahlen zur Abbildung beitragen können, während alle die Blende *außerhalb* ihrer Öffnung treffenden Strahlen in dieser „abgeblendet" (und absorbiert) werden.

Diejenige (materielle) Blende oder Linsenberandung, deren *objektseitiges* Bild vom *Achsenschnittpunkt* des Objektes aus unter dem *kleinsten* (räumlichen) Öffnungswinkel erscheint, bezeichnet man als „*Öffnungsblende* des abbildenden Systems" (mit Bezug auf den betreffenden Objektabstand). Ihr *objekt*seitiges Bild bezeichnet man als „Eintrittspupille" (EP), ihr *bild*seitiges Bild als „Austrittspupille" (AP) des abbildenden Systems, und zwar wieder: mit Bezug auf den betreffenden Objektabstand.

Da auch alle Linsenberandungen als Blenden wirken, so wird im allgemeinen ein von einem *außeraxialen* Objektpunkt ausgehendes Strahlenbündel durch das Zusammenwirken der eigentlichen materiellen Blende und der Linsenberandungen in seinem Querschnitt so „abgeblendet", daß jener

Querschnitt des betreffenden durch das optische System hindurchgegangenen Strahlenbündels nicht mehr kreisförmig sein wird, sondern ein von zwei Kreis- oder Ellipsenbögen begrenztes Bogenzweieck darstellt. Man spricht in diesem Fall von einer „Vignettierung" des abbildenden Strahlenbündels.

Solange eine solche Vignettierung des abbildenden Strahlenbündels *nicht* vorliegt, bezeichnet man den durch die Mitte der Blendenöffnung hindurchgegangenen Strahl als den „Hauptstrahl" des Strahlenbündels. Dabei ist dieser Hauptstrahl also gewissermaßen „Schwerstrahl" des Strahlenbündels, da er alle kreisförmigen Querschnitte in ihrem Schwerpunkt (Mittelpunkt) durchsetzt.

Tritt indessen Vignettierung ein, so ist *nicht der durch die Blendenmitte* gehende Strahl Hauptstrahl des abbildenden Strahlenbündels, sondern derjenige Strahl, der bildseitig der „*Schwerstrahl*" — in der angegebenen Bedeutung — ist.

Wir behandeln daher in diesem Abschnitt Strahlenbündel endlich großer Öffnung bzw. Strahlen endlich großer Neigung gegen die Achse bzw. die Flächennormale (im „Einfallspunkt" der Strahlen, in dem diese die brechende Fläche treffen) und geben hierfür zunächst die für die praktische Durchrechnung erforderlichen Durchrechnungsformeln sowie hierfür geeignete Rechenschemata an, wie sie sich bei logarithmischer Durchrechnung als vorteilhaft erwiesen haben. Für das Rechnen mit der Rechenmaschine wird man die Schemata zweckentsprechend zu ändern haben.

Wir werden dabei erkennen, daß die von einem *Punkt* ausgehenden Strahlen nach dem Durchgang durch das optische System im allgemeinen nicht wieder alle durch *einen* Punkt hindurchgehen bzw. — bei einem „nicht reellen", bei einem „virtuellen" Bild — nicht wieder alle von *einem* Punkt, eben dem sogenannten „virtuellen Bildpunkt", herzukommen scheinen, sondern daß Abweichungen von dieser „idealen" Strahlenvereinigung, wie sie sich bei Abbildung durch „paraxiale Strahlenbündel" ergibt, auftreten. Diese Abweichungen von der idealen (reellen oder virtuellen) Strahlenvereinigung sowie die sich hierdurch — bei Abbildung von Objekten endlicher Größe — ergebenden Abweichungen der Bilder jener Objekte von der Objektähnlichkeit bezeichnet man als „Abbildungsfehler" des optischen Systems, wobei indessen diese Abbildungsfehler nicht allein von dem optischen System abhängen — also mit der oben gebrauchten Bezeichnung keine „Systemkonstanten", keine systemkonstanten Eigenschaften sind, sondern wesentlich auch von der Lage und Größe des abzubildenden Objektes abhängen.

Bevor wir die oben bereits erwähnten Rechenschemata angeben, wollen wir uns kurz — in IV 2 — einen allgemeinen Überblick über die möglichen Abbildungsfehler und ihre charakteristischen Merkmale verschaffen, soweit sie in den Grenzen der „Abbildung dritter Ordnung" auftreten können, also dann, wenn die Abstände der abzubildenden Objektpunkte von der Symmetrieachse des abbildenden Systems und die Neigungswinkel der abbildenden Strahlen gegen jene Achse zwar nicht mehr *so* klein sind, daß man alle Potenzen jener Größen oder ihrer Produkte, die von höherer als der ersten Ordnung sind, vernachlässigen kann, aber doch *noch klein genug* sind, um alle Potenzen oder Produkte, die von höherer als der dritten Ordnung sind, vernachlässigen zu dürfen.

Es muß hier vielleicht besonders erwähnt werden, daß bei rotationssymmetrischen Systemen die genannten Größen — Achsenabstände und Neigungswinkel gegen die Achse — nur als Potenzen bzw. Potenzprodukte von *ungerader* Ordnung auftreten, so daß man es nur mit „Abbildungen erster, dritter, fünfter, ... Ordnung“ bei derartigen Systemen zu tun hat.

2. Allgemeines über Abbildungsfehler; ihre charakteristischen Merkmale

a) *Sphärische Aberration*[1] (s. Abb. 15)

Lichtstrahlen, die von einem Achsenpunkt ausgehen und durch ein optisches System hindurchgehen, schneiden die Achse nach dem Durchgang durch das optische System im allgemeinen nicht im gleichen Punkte; vielmehr ist der Schnittpunkt der durch das System hindurchgegangenen Strahlen mit der Achse von ihrer Einfallshöhe und demnach von ihrer Neigung gegen die Achse, dem „Öffnungswinkel“ des betreffenden Strahles, abhängig. Er entfernt sich zunächst mit wachsender Einfallshöhe immer mehr von dem Punkt O', der sich als Schnittpunkt des paraxialen Strahlenganges ergibt, um für größere Einfallshöhen evtl. wieder umzukehren. Es entsteht statt eines punktförmigen Bildes eine „Bildfläche“ (Kaustik), die symmetrisch zur optischen Achse liegt. Man bezeichnet diesen Fehler als „sphärische Aberration“, oft auch — da er nur vom Öffnungswinkel der Strahlen, nicht aber vom Achsenabstand des Objektpunktes abhängig ist — als „Öffnungsfehler“ und unterscheidet positive (Abb. 15 A) und negative (Abb. 15 B) sphärische Aberration, von denen die

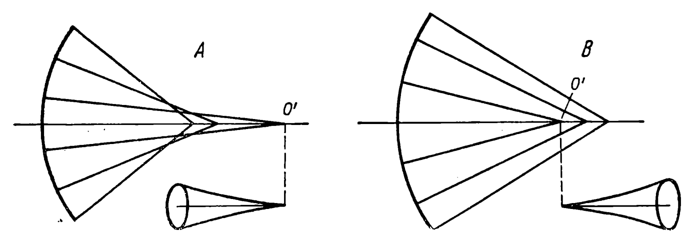


Abb. 15. Zur sphärischen Aberration (≡ Öffnungsfehler).

A. Positive Aberration oder Unterkorrektion, *B*. Negative Aberration oder Überkorrektion mit Darstellung der Kaustik (Brennfläche) als mit sphärischer Aberration behaftetes Bild eines axialen Objektpunktes. Dabei ist die einfachste Form der sphärischen Aberration ($\Delta s'$) angenommen, nämlich daß sie — etwa als Funktion des Neigungswinkels u' der abbildenden Strahlen gegen die Achse oder als Funktion der Einfallshöhe t (bzw. $\mathring{t}$) — durch ein einziges Glied [z. B.: $\Delta s' = a \cdot \mathrm{tg}^2 u' (\approx a u'^2)$] darstellbar ist. Ist hier $a < 0$, so liegt Unterkorrektion (A) vor, ist $a > 0$, so handelt es sich um Überkorrektion (B).

[1] Vom lateinischen „aberrare“ = abirren, abschweifen. Die Abweichungen der Strahlen von dem idealen, d h. bildseitig bildfehlerfreien Verlauf bezeichnet man daher allgemein als „Aberrationen“ der Strahlen bzw. der Strahlenbündel, wobei man — bei rotationssymmetrischen Systemen — von Aberrationen 3., 5. usw. Ordnung spricht. (Vgl. Schluß der „Vorbemerkungen“ IV 1.)

erste auch oft als „Unterkorrektion", die zweite als „Überkorrektion" bezeichnet wird. Beide Arten der Benennung erklären sich dadurch, daß die einfachsten Linsen sowie einfache, nicht besonders korrigierte Linsensysteme eine sphärische Aberration nach Abb. 15 A besitzen, die man — je größer sie ist — mit einem um so größeren (positiven) Zahlenwert angibt, der bei „Korrektion" herabgedrückt wird und zu Null gemacht werden soll. Übertreibt man die Korrektion („*Über*korrektion"), so wird der den Aberrationsbetrag angebende Zahlenwert „*negativ*". Solange sie noch „*positiv*" ist, ist das System noch nicht ausreichend korrigiert, also noch „*unter*korrigiert".

Die Bezeichnung dieses Fehlers als „sphärische Aberration" wurde und wird auch heute noch oft dahin erklärt, daß man sagt, es handele sich hier um einen Fehler, der durch die Kugelflächengestalt der brechenden (oder spiegelnden) Flächen bedingt sei. Diese Erklärung oder Deutung des Namens dieses Fehlers ist aber irreführend. Auch bei Flächen, die nicht die Gestalt von Kugelflächen haben, tritt im allgemeinen dieser Fehler auf, wenn es auch bestimmte Flächen gibt — die sogenannten „Cartesischen Flächen", die in Abschnitt XII kurz erwähnt werden und zu denen (für bestimmten Objekt- und Bildpunkt) die rotationsellipsoidischen und die paraboloidischen Spiegelflächen gehören —, die für bestimmte Objektpunkte frei von sphärischer Aberration sind.

Tatsächlich besagt die Fehlerbezeichnung „*sphärische Aberration*", daß es sich hier um den (*einfachsten*) Fehler handelt, durch den die von einem Punkt ausgehenden, ursprünglich Kugelflächengestalt besitzenden *Wellenflächen* eine (rotationssymmetrische) Deformation, also eine *Abweichung von ihrer „sphärischen" Form*, ihrer Kugelflächenform, also eine „sphärische Aberration" erfahren.

b) *Verzeichnung* (s. Abb. 16)

Man nennt eine (durch enge, d. h. wenig geöffnete Strahlenbündel verschieden großer — auch endlicher — Hauptstrahlneigung erzeugte) Abbildung verzeichnungsfrei, wenn die Vergrößerung für alle Linien- oder Flächenelemente des achsensenkrechten ebenen Objektes den gleichen Wert besitzt, also konstant ist. Für die Verzeichnungsfreiheit muß also gelten $\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1'}{y_2'}$, wenn y_1 und y_2 die Größen zweier Objekte sind, die der gleichen Objektebene angehören, und $y_2 = c\,y_1$, wo c eine beliebige Zahl ist.

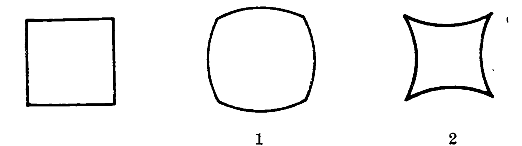


Abb. 16. Zur Verzeichnung.

Die Verzeichnung, also die Abhängigkeit der Vergrößerung eines linearen achsensenkrechten Objektes von seiner Größe, dem Abstand seiner Punkte von der optischen Achse, wird besonders deutlich bei Abbildung eines zur Achse senkrechten und symmetrisch gelegenen Quadrates. Nimmt die Vergrößerung mit zunehmendem Achsenabstand ab, so ist das Bild des Quadrates „tonnenförmig" verzeichnet (1), im entgegengesetzten Fall dagegen „kissenförmig" (2).

Gilt diese Bedingung nicht, so muß man zwei Fälle unterscheiden:

α) Die Vergrößerung *nimmt ab* mit *zunehmendem* Achsenabstand des Objektelementes. Diese Art der Verzeichnung nennt man tonnenförmig, denn ein Quadrat wird als tonnenförmige Figur abgebildet.

β) Die Vergrößerung *wächst* mit *zunehmendem* Achsenabstand des Objektelementes. Diese Art der Verzeichnung nennt man kissenförmig, denn ein Quadrat wird als kissenförmige Figur wiedergegeben.

[Bei Abbildung mit weit geöffneten Strahlenbündeln sind die Bilder der *außeraxialen* Objektpunkte natürlich ebensowenig „punktförmig" wie das mit sphärischer Aberration behaftete Bild des *auf der Achse* liegenden Objektpunktes].

c) *Astigmatismus* (s. Abb. 17)

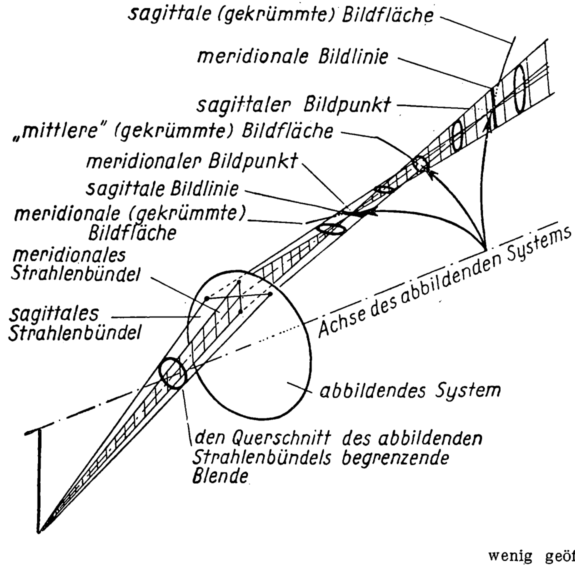
Wir betrachten jetzt ein *nur wenig geöffnetes* Strahlenbündel, das von einem (weit) *außerhalb* der optischen Achse liegenden Objektpunkt ausgehen soll und dessen räumliche Öffnung von einer achsenzentrischen Blendenöffnung bestimmt werde, die sich in einem bestimmten Abstande von dem Objektpunkt befinde. Der durch die Blendenmitte gehende Strahl sei (s. IV 1) der Hauptstrahl des betreffenden abbildenden Strahlenbündels. Da das Strahlenbündel schief auf die brechenden Flächen fällt, kann man sich jetzt nicht mehr auf die ebene Betrachtungsweise, also auf die Untersuchung der Strahlen einer durch die Symmetrieachse des abbildenden Systems gelegten Ebene, einer sogenannten Meridianebene, beschränken. Man betrachtet daher *zwei* ausgezeichnete Ebenen durch den Hauptstrahl des abbildenden Strahlenbündels, die „meridionale" oder „tangentiale" Ebene (Zeichenebene) und die dazu senkrechte „sagittale" Ebene. Man bekommt jetzt im allgemeinen keinen Brennpunkt, sondern zwei in den betreffenden Ebenen liegende Brennlinien. Dort, wo sich die sagittalen Strahlen — näherungsweise — in einem Punkte schneiden, ergeben die tangentialen (meridionalen) Strahlen eine in der Tangentialebene ($\equiv$ Meridionalebene) liegende Brennlinie und umgekehrt. Dieser Fehler, den man als Astigmatismus bezeichnet, wird im allgemeinen um so größer, je weiter sich der Objektpunkt von der optischen Achse entfernt.

d) *Bildfeldkrümmung* (s. Abb. 17)

Dies hat zur Folge, daß man für verschiedene Neigungswinkel der Hauptstrahlen gegen die optische Achse und dementsprechend für verschieden weit von der Achse entfernte Punkte eines ebenen Objektes in den betreffenden (Meridian- bzw. Sagittal-)Ebenen bestimmte astigmatische Bildpunkte erhält, die verbunden die sogenannten astigmatischen Bildkurven bzw. Bildflächen ergeben. Auf der „meridionalen" Bildfläche ist jeder *Punkt* des achsensenkrechten Objektes als „sagittale" Bildlinie, auf der „sagittalen" Bildfläche dagegen als „meridionale" Bildlinie und auf einer „mittleren" Bildfläche als kleines kreisförmiges Scheibchen abgebildet.

e) *Koma* (s. Abb. 18)

Man betrachte wieder einen *außerhalb* der optischen Achse gelegenen Objektpunkt, lasse aber jetzt auch *endlich geöffnete* Strahlenbündel zu. Man bekommt



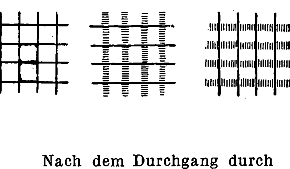


Abb. 17. Schematische Darstellung des meridionalen und sagittalen Schnittes durch ein von einem außeraxialen Objektpunkt ausgehendes Strahlenbündel.

Nach dem Durchgang durch das optische System ändert sich im allgemeinen der Querschnitt des Strahlenbündels in den beiden genannten Schnitten verschiedenartig, und zwar derartig, daß er einmal zu einer in der Sagittalebene, einmal zu einer in der Meridionalebene (≡ Tangentialebene) liegenden Kurve entartet, die in Sonderfällen auch geradlinig sein kann und in erster Näherung (bei wenig geöffneten Strahlenbündeln) auch als geradlinig angenommen werden kann. Diese „entarteten" Querschnitte sind die „meridionale" (oder „tangentiale") sowie die „sagittale" Bildlinie. An den anderen Stellen sind die Querschnitte des bildseitigen Strahlenbündels — das objektseitig durch eine kreisförmige Blende begrenzt angenommen sei — im allgemeinen elliptisch, wobei die *große* Achse der Ellipse in der *Umgebung* der Bild*linien* die Richtung der *betreffenden* Bildlinie hat. Zwischen den beiden Bildlinien liegt

1. eine Stelle, an der das Strahlenbündel *kreis*förmigen Querschnitt besitzt, und
2. eine Stelle, an der der Querschnitt des Strahlenbündels einen extremalen (und zwar einen maximalen) Flächeninhalt (geometrisch-optisch betrachtet) besitzt. [An den Stellen der Bild*linien* ist der (geometrisch-optische) „*Flächen*inhalt" ja gleich Null.]

Die Stelle *extremalen* Querschnitts liegt — längs des bildseitigen Hauptstrahls gemessen — genau in der Mitte zwischen den beiden Brennlinien und ist im allgemeinen elliptisch mit den beiden Achsenlängen $b_1 = \frac{1}{2} b_s$ und $b_2 = \frac{1}{2} b_t$, wenn b_s und b_t die Längen der sagittalen bzw. tangentialen Bildlinie angeben. Die Stelle *kreisförmigen* Querschnitts hat den Durchmesser $b = \frac{b_s b_t}{b_s + b_t}$ und hat von der tangentialen Bildlinie den Abstand $\frac{a b_t}{b_s + b_t}$, von der sagittalen Bildlinie den Abstand $\frac{a b_s}{b_s + b_t}$, wenn a der gegenseitige Abstand beider Bildlinien ist. — Für $b_s = b_t$ fallen „kreisförmiger" Querschnitt und „extremaler" Querschnitt zusammen, während sie im allgemeinen etwas verschiedene Lage und etwas verschiedenen (geometrisch-optischen) Flächeninhalt besitzen. — Die Stelle kreisförmigen Querschnitts pflegt man als „Stelle engster Einschnürung" zu bezeichnen, obwohl hier der Flächeninhalt annähernd gleich oder sogar gleich dem maximalen Flächeninhalt der Querschnitte des Strahlenbündels zwischen den beiden Brennlinien ist. Doch ist an dieser Stelle das „Bild" des Objekt*punktes* am geringsten „verzerrt", nämlich ein kleiner *kreis*förmiger „Bild*fleck*". Den geometrischen Ort der Mittelpunkte der so definierten „Stellen engster Einschnürung" für die verschiedenen außeraxialen Objektpunkte bezeichnet man als „mittlere Bildfläche", die geometrischen Orte der jenen Objektpunkten zugeordneten „sagittalen" bzw. „meridionalen" Bild*punkte*, also der *Mittelpunkte* der „tangentialen" bzw. „sagittalen" *Bildlinien*, bezeichnet man als „sagittale" bzw. „meridionale" (≡ „tangentiale") Bildfläche. Die „mittlere Bildfläche" stellt daher das „Bild" einer achsensenkrechten Objektebene dar und ist im allgemeinen selbst nicht eben, sondern gekrümmt. Man bezeichnet die Krümmung der Bildfläche als die „Bildfeldwölbung".

auch bei diesen außeraxialen Lichtbündeln sphärische Abweichungen (s. o.), die ihrerseits Abweichungen von den astigmatischen Bildkurven hervorrufen und zu einem eigentümlichen Fehler Veranlassung geben, der dem Bilde eines solchen außeraxialen Objektpunktes kometenartiges Aussehen gibt, derart, daß das Bild des betreffenden Punktes die Gestalt eines radial verschmierten Fleckes ist, der an der Stelle des idealen Bildortes etwa punktförmig ist, sich aber entweder radial nach außen oder radial nach innen — d. h. zur Achse hin — verbreitert, wobei die Intensität mit zunehmendem Abstand vom idealen Bildort abnimmt. Man bezeichnet diese Fehler als „Koma" oder „Komafehler".

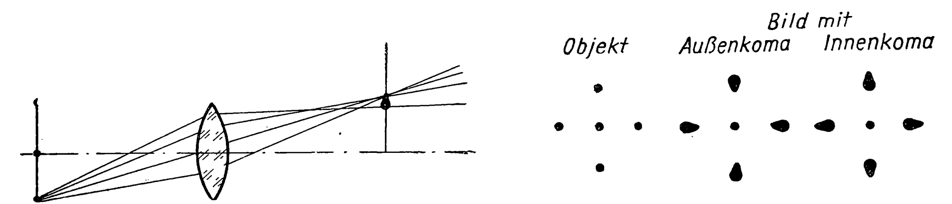


Abb. 18. Schematische Darstellung des Komafehlers (im engeren Sinne).
Verlauf der von einem außeraxialen Objektpunkt ausgehenden Meridionalstrahlen bei (objektseitig) endlicher Öffnung des Strahlenbündels.

f) Gelegentlich spricht man noch von dem sogenannten „*Dreistrahlfehler*" sowie von dem „*Rinnenfehler*". Bei beiden handelt es sich aber nur um Teilfehler des Komafehlers, also um Fehler, die sich ergeben, wenn man nur spezielle Strahlen der den Komafehler ergebenden bzw. besitzenden Strahlenbündel herausgreift. Betrachtet man z. B. nur diejenigen Strahlen eines mit dem Komafehler behafteten Strahlenbündels, die objektseitig in einer durch den Hauptstrahl des abbildenden Strahlenbündels senkrecht zur Meridianebene des Hauptstrahls gelegten Ebene verlaufen, so bilden diese Strahlen, diese — objektseitig ebenen — Strahlen*büschel* bildseitig eine Art „Rinne", wie dies Abb. 19a andeutet, deren Rinnenkrümmung aber auch von der Achse weg gerichtet sein kann.

Betrachtet man dagegen aus jenem mit dem Komafehler behafteten Strahlenbündel 3 Strahlen, von denen zwei spiegelbildlich zur Meridianebene, der dritte dagegen zu einem der beiden ersten Strahlen spiegelbildlich mit Bezug auf den Hauptstrahl, zu dem anderen der beiden ersten Strahlen spiegelbildlich mit Bezug auf die durch den Hauptstrahl senkrecht zur Meridianebene gelegte Ebene, die sogenannte „Sagittalebene", ist, so verlaufen die ersten beiden Strahlen bildseitig zur Meridianebene und zum Hauptstrahl symmetrisch, der dritte Strahl aber zu dem ersten unsymmetrisch mit Bezug auf den Hauptstrahl, zu dem zweiten dagegen symmetrisch mit Bezug auf den Hauptstrahl. (Vgl. Abb. 19b.)

g) Sämtliche bisher angegebenen Abbildungsfehler beziehen sich auf einfarbiges Licht. Bei Verwendung mehrfarbigen Lichtes sind noch folgende Fehler zu berücksichtigen:

α) Die chromatische Aberration.

β) Der chromatische Vergrößerungsfehler.

Auf diese und die zuvor bereits kurz charakterisierten Fehler werden wir in den folgenden Abschnitten noch eingehend zu sprechen kommen.

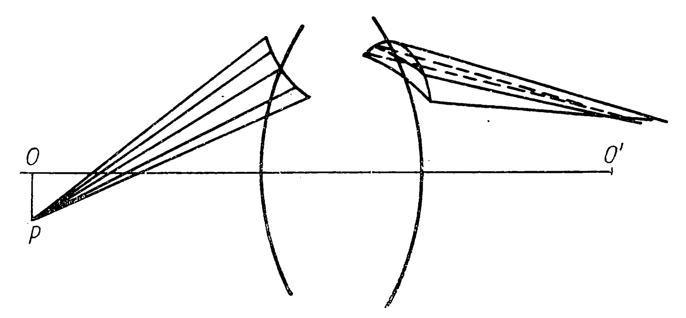


Abb. 19a. Zur Definition des „Rinnenfehlers".

Ein von einem außeraxialen Punkt kommendes einfallendes „Sagittalstrahlenbüschel", dessen Strahlen also die erste Linsenfläche (oder die Eintrittspupille — s. IV 1) in einem Linienelement eines um die optische Achse des Systems geschlagenen Kreises durchsetzen, durchsetzen die letzte Linsenfläche (und die Ebene der Austrittspupille) im allgemeinen *nicht* in dem Linienelement eines Kreises um die optische Achse, sondern in einer stärker (oder schwächer) gekrümmten Linie. Es bildet so bildseitig nicht mehr ein (in erster Näherung) ebenes Strahlenbüschel, sondern eine Fläche, die die Form einer „Rinne" hat.

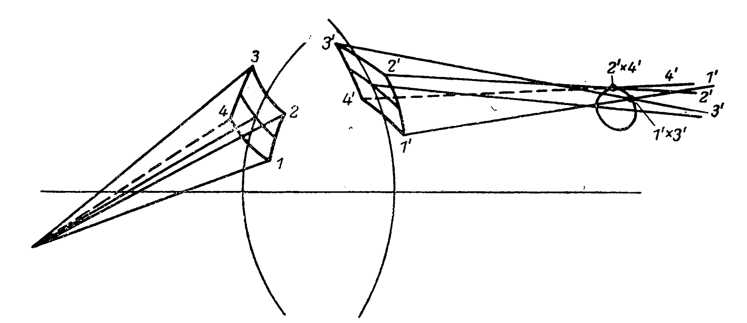


Abb. 19b. Zur Definition des sogenannten „Dreistrahlfehlers".

Betrachtet man in einem Strahlen*bündel*, das von einem außeraxialen Punkt ausgeht, vier Strahlen (1, 2, 3, 4), die paarweise symmetrisch zur durch den Hauptstrahl des Bündels gelegten Meridionalebene (2 u. 3 bzw. 1 u. 4) und Sagittalebene (1 u. 2 bzw. 3 u. 4) liegen, so durchsetzen die den Strahlen 1 u. 3 zugeordneten Strahlen 1′ u. 3′ die durch den Bildpunkt des außeraxialen Objektpunktes gelegte achsensenkrechte Bildebene nicht in diesem Bildpunkt, sondern in einem Punkte (1′ × 3′), die bildseitigen Strahlen 2′ und 4′ in einem Punkte (2′ × 4′), wobei (2′ × 4′) symmetrisch zu (1′ × 3′) mit Bezug auf die durch den eigentlichen Bildpunkt gehende Meridianebene liegt. Da zur Bestimmung der beiden Punkte (1′ × 3′) und (2′ × 4′) die Kenntnis des Verlaufs von mindestens 3 Strahlen erforderlich ist[1], bezeichnet BEREK diesen Fehler als „Dreistrahlfehler".

Dreistrahl- sowie Rinnenfehler sind Teilfehler des Komafehlers.

---

[1] Denn 1′ und 3′ liefert Schnittpunkt (1′ × 3′). Schnittpunkt (2′ × 4′) erhält man dann, wenn der Verlauf von 2′ (oder 4′) bekannt ist, indem man die durch (1′ × 3′) gelegte achsensenkrechte Ebene mit 2′ (bzw. 4′) zum Schnitt bringt.

3. Durchrechnungsformeln und Rechenschema für die Berechnung der sphärischen Aberration

Für einen nichtparaxialen Strahl ($u \not\approx 0$) bezeichnen wir den Abstand seines Schnittpunktes mit der optischen Achse des Systems vom Flächenscheitel durch $\tilde{s}$ bzw. $\tilde{s}'$.

Es sei (Abb. 20)

u der Winkel zwischen einfallendem Strahl und optischer Achse,
$\tilde{s} = \overrightarrow{SO}$,
$S =$ Linsenscheitel,
$O =$ Objektpunkt auf der Achse
$=$ Achsenschnittpunkt des Strahles.
(Das punktförmige Objekt befinde sich also auf der optischen Achse.)

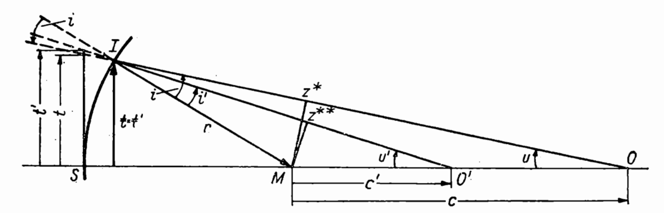


Abb. 20. Zur rechnerischen Bestimmung der sphärischen Aberration einer Abbildung durch ein optisches System bei gegebenem u und $\tilde{s}$ des durchzurechnenden Strahles [z^*, z^{**} bezeichnen die *Längen* der Lote von M auf IO bzw. IO' (nicht ihre Fußpunkte)].

$\tilde{s}' = \overrightarrow{SO'}$,
$O' =$ Bildpunkt,
$t =$ *Abstand des Schnittpunktes* „einfallender Strahl $\times$ Tangentialebene im Achsenschnittpunkt der brechenden Fläche“ *von der optischen Achse*,
$a =$ Abstand des Achsenschnittpunktes des Strahls vom objektseitigen $=$ Hauptpunkt des Systems.

Der einfallende Strahl kann dann in verschiedener Weise, z. B. auf eine der folgenden fünf Arten, näher bestimmt sein, indem gegeben bzw. bekannt sind:

A) u und a,
B) a und t,
C) u und $\tilde{s}$,
D) t und u,
E) t und $\tilde{s}$.

Statt t wird oft auch der Achsenabstand des Schnittpunktes „(einfallender) Strahl $\times$ brechende Fläche“ gewählt, den wir mit $\mathfrak{t}$ bezeichnen wollen und für den $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$ ist. Für *achsennahe* Strahlen stimmt $\mathfrak{t}$ mit t überein.

Für die Fälle C und D seien die Durchrechnungsformeln sowie das Durchrechnungsschema hier angegeben.

Fall C: *Gegeben seien u und* $\tilde{s}$.

Dann gilt mit

a) $c' = \overrightarrow{MO'}$, $\tilde{s} = \overrightarrow{SO}$, $\tilde{s}' = \overrightarrow{SO'}$,

$c = \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SO} = \tilde{s} - r$, $r = \overrightarrow{SM}$.

Aus der Figur folgt:

$$\sin i = \frac{z^*}{r}, \quad z^* = c \cdot \sin u, \quad \sin i = \frac{c \cdot \sin u}{r}, \qquad \text{(IV 3,1)}$$

$$\sin i' = \frac{z^{**}}{r}, \quad z^{**} = c' \cdot \sin u', \quad \sin i' = \frac{c' \cdot \sin u'}{r}, \qquad \text{(IV 3,2)}$$

$$u' = u + i - i', \qquad c' = \frac{\sin i' \cdot r}{\sin u'}. \qquad \text{(IV 3,3)}$$

Ferner ist:

$$\tilde{s}' = \overrightarrow{SO'} = \overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{SM} = c' + r. \qquad \text{(IV 3,4)}$$

Aus dem Brechungsgesetz folgt:

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \cdot \sin i. \qquad \text{(IV 3,5)}$$

Für die zweite (bzw. folgende) Fläche folgt als Übergangsbeziehung:

$$u_{+1} = u', \qquad d' = \overrightarrow{SS_{+1}},$$

wobei S_{+1} der Scheitel der folgenden Fläche ist.

$$\tilde{s}_{+1} = \overrightarrow{S_{+1}O'} = \overrightarrow{S_{+1}S} + \overrightarrow{SO'} = \overrightarrow{SO'} - \overrightarrow{SS_{+1}} = \tilde{s}' - d'.$$

Zur Berechnung verwendet man folgendes Schema:

Rechenschema I (Gegeben u und $\tilde{s}$)

	log	Num[1]		log	Num[1]
$\tilde{s}$			$\frac{1}{n'}$		
r					
$(c =)\ \tilde{s} - r$	— — — — — —		$\sin i'$		
			$u' = u + i - i'$	—	
$\sin u$			$\sin u'$		
$\frac{1}{r}$		—	$r \cdot \sin i'$		
			c'		
$\sin i$	————		$\tilde{s}'(= c' + r)$	—	
$u + i$	—		d'		
n			$\tilde{s}'_{+1}$		

[1] Bei den trigonometrischen Funktionen wird in die Spalte „Num" nicht der Zahlenwert (Numerus) der betreffenden trigonometrischen *Funktion*, sondern der Wert des betreffenden *Winkels* eingetragen. Ein kurzer „—" bedeutet, daß der betreffende Wert (Num bzw. log) nicht benötigt, also nicht eingetragen wird.

Spezialfälle von Fall C

b) Ist $r = \infty$,

so ist

$$i = -u,$$

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i,$$

$$u' = -i',$$

$$\tilde{s}' = \tilde{s}\,\frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'},$$

(während für paraxiale Strahlen — wie hier nebenbei erwähnt sei — bei $r = \infty$, also bei ebenen Flächen: $s' = s \cdot \frac{n'}{n}$ ist).

Rechenschema II ($r = \infty$)

	log	Num[1]
$\tilde{s}$		
$\sin(i = -u)$		
n		
$\frac{1}{n'}$		
$\sin i' = -\sin u'$		
$\operatorname{tg} u$		—
$(\operatorname{cotg} u' =) \frac{1}{\operatorname{tg} u'}$		—
$\tilde{s}'$		
d'	—	
$\tilde{s}_{+1}$		

c) Für *große* Werte von r. [Es gilt hierfür natürlich auch das unter a) (für $r \neq \infty$) Gesagte, doch würde dies hier zu ungenaue Werte ergeben.]

Nachdem — wie oben — der Winkel $u + i$ und u' berechnet ist, bildet man

$$(\tilde{s} - m)\operatorname{tg} u = t,$$

$$\tilde{s}' = \frac{t}{\operatorname{tg} u'} + m,$$

wobei

$$m = 2\,r \sin^2 \frac{u+i}{2}$$

die zugehörige Bogenhöhe ist.

Ist der Strahl durch $\tilde{s}$ und t (t = Achsenabstand des Schnittpunktes des Strahles mit der *Fläche*) gegeben, so gilt

$$m = r - \sqrt{r^2 - t^2},$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{t}{\tilde{s} - m}.$$

Rechenschema III ($r \to \infty$)
[anschließend an „sin u'" in Rechenschema I]

	log	Num[1]
$\sin^2 \frac{u+i}{2}$		
$2\,r$		
m		
$\tilde{s} - m$		
$\operatorname{tg} u$		—
$\frac{1}{\operatorname{tg} u'}$		—
$(\tilde{s} - m)\frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'} (= \tilde{s}' - m)$		
$\tilde{s}'$		

[1] Siehe Anmerkung der vorigen Seite.

d) Bei $u = 0$, d. h. achsenparallel einfallendem Strahl:

$$\sin i = \frac{t}{r},$$

$$\sin i' = \frac{n \cdot \sin i}{n'},$$

$$u' = i - i',$$

$$c' = \frac{r \sin i'}{\sin u'},$$

$$\tilde{s}' = c' + r,$$

$$\tilde{s}_{+1} = \tilde{s}' - d'.$$

Rechenschema IV ($u = 0$)

		log	Num
t	$u + i = i$		
r	$\sin u'$		
$\sin i$	$r \sin i'$		
n	c'		
$\frac{1}{n'}$	$\tilde{s}'$		
$\sin i'$	d'		
	s_{+1}		

Fall D: *Gegeben seien t und u.*

Wir bezeichnen hier das vom Krümmungsmittelpunkt (M) der brechenden Fläche auf den einfallenden Strahl (bzw. seine Verlängerung) gefällte Lot durch z^*, das von M auf den gebrochenen Strahl gefällte Lot durch z^{**} (Abb. 21).

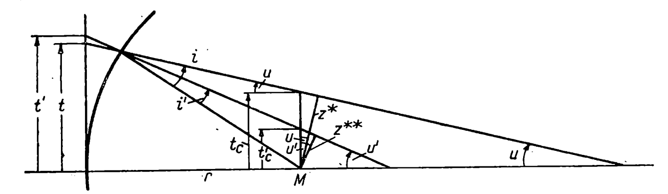


Abb. 21. Zur rechnerischen Bestimmung der sphärischen Aberration einer Abbildung durch ein optisches System bei gegebenem t und u des durchzurechnenden Strahles.

Aus der Figur folgt:

$$t_c = t - r \operatorname{tg} u, \qquad z^* = t_c \cdot \cos u,$$

$$\sin i = \frac{z^*}{r},$$

also

$$\sin i = \frac{t_c \cdot \cos u}{r}.$$

Aus dem Brechungsgesetz folgt:

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \cdot \sin i,$$

$$u' = u + i - i', \qquad z^{**} = t'_c \cdot \cos u',$$

$$\sin i' = \frac{z^{**}}{r},$$

also

$$t'_c = r \cdot \frac{\sin i'}{\cos u'};$$

$$t' = t'_c + r \operatorname{tg} u'.$$

Beim Übergang auf die zweite Fläche ergibt sich (s. Abb. 22):

$$t_{+1} = t' - d' \operatorname{tg} u',$$

$$u_{+1} = u',$$

$$s' = \frac{t'}{\operatorname{tg} u'}.$$

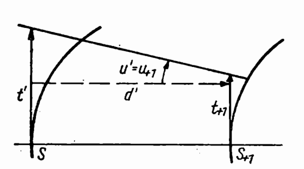


Abb. 22. Zu den „Übergangsformeln" der Berechnung der sphärischen Aberration.

Rechenschema V (Gegeben t und u)

	log	Num		log	Num
t_1			$i_1 - i'_1$	—	
r_1			$\cos u'_1$		
$\operatorname{tg} u_1$			$(t'_c)_1$		
$r_1 \operatorname{tg} u_1$			$\operatorname{tg} u'_1$		—
$(t_c)_1$			$r_1 \cdot \operatorname{tg} u'_1$		
$\cos u_1$		—	t'_1		
$\frac{1}{r_1}$		—	$\bar{s}'_1$		
$\sin i_1$			d'_1		
$\frac{n_1}{n'_1}$		—	$d'_1 \operatorname{tg} u'_1$		
$\sin i'_1$			$t_2 = t_{+1}$		

Man kann sich nun über die sphärische Aberration ein Bild verschaffen, indem man $\Delta s' = \bar{s}'_k - s'_k$ bildet [wobei also $\Delta s'$ der (positive oder negative) Abstand der Bildpunkte ist, die dem Achsenpunkt des Objektes durch den

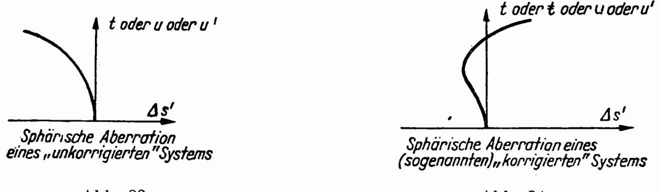


Abb. 23 und 24. Zur graphischen Darstellung der sphärischen Aberration eines „unkorrigierten" (Abb. 23) bzw. eines sogenannten „korrigierten" Systems (Abb. 24).

Schnittpunkt eines von ihm ausgehenden Strahles *endlicher* Neigung (gegen die Achse) mit der Achse einerseits, durch den Schnittpunkt eines von ihm ausgehenden paraxialen Strahles mit der Achse andererseits zugeordnet sind] und indem man die Kurve mit den Koordinaten $(\Delta s', t)$ bzw. $(\Delta s', u)$ oder auch $(\Delta s', u')$ zeichnet (Abb. 23 und 24). Bei idealer Korrektur würde die Kurve mit der Ordinatenachse zusammenfallen, was aber mit sphärischen Flächen im allgemeinen nicht erreichbar ist.

4. Durchrechnungsformeln und Rechenschema für die Berechnung des Astigmatismus

a) *Berechnung des Verlaufes eines meridionalen (≡ tangentialen) Strahles*

Wir betrachten ein von einem Punkt *außerhalb der optischen Achse* ausgehendes *unendlich wenig geöffnetes* Strahlenbündel und in ihm einen tangentialen Strahl, auch „meridionaler Strahl" genannt, also einen in der Meridianebene des (rotationssymmetrischen) optischen Systems verlaufenden Strahl, sowie einen ihm benachbarten, gleichfalls in der Meridianebene verlaufenden Strahl (Abb. 25).

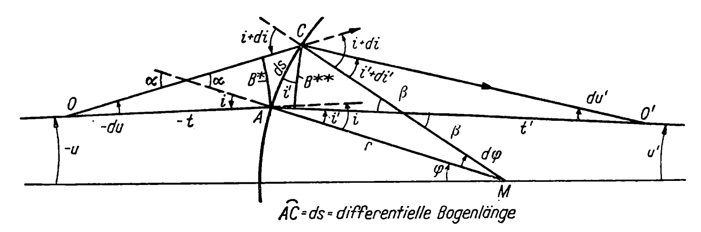


Abb. 25. Zur Aufstellung der Formeln für die rechnerische Bestimmung des Astigmatismus einer Abbildung. [Statt $-t$, t' lies $-\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$.]

Wir setzen:

$$\overrightarrow{AO} = \mathfrak{t}\,, \qquad \overrightarrow{AO'} = \mathfrak{t}'\,.$$

$\overset{\frown}{AC} = ds =$ differentielle Bogenlänge des Meridianschnittes der brechenden Fläche.

Aus der Figur folgt:

$$\alpha = i - du\,, \qquad \alpha = i + di - d\varphi\,,$$
$$\beta = i' + d\varphi\,, \qquad \beta = i' + di' + du'.$$

Daraus ergibt sich:

$$-du = di - d\varphi\,, \qquad d\varphi = di' + du'.$$

Indem man zwei Kreisbogen B^*, B^{**} um O und O' schlägt, folgt:

$$-du = -\frac{B^*}{\mathfrak{t}}\,, \quad B^* = ds \cdot \cos i\,, \quad \text{also} \quad -du = -\frac{ds \cdot \cos i}{\mathfrak{t}}\,,$$

$$du' = \frac{B^{**}}{\mathfrak{t}'}\,, \quad B^{**} = ds \cdot \cos i'\,, \quad \text{also} \quad du' = \frac{ds \cdot \cos i'}{\mathfrak{t}'}\,.$$

Es folgen also die drei Beziehungen:

$$-du = di - d\varphi = -\frac{ds \cdot \cos i}{\mathfrak{t}},$$

$$d\varphi = di' + du' = di' + \frac{ds \cdot \cos i'}{\mathfrak{t}'}, \qquad d\varphi = \frac{ds}{r}.$$

Also folgt:

$$di = \frac{ds \cdot \cos i}{-\mathfrak{t}} + \frac{ds}{r}$$

und

$$di' = \frac{ds}{r} - \frac{ds \cdot \cos i'}{\mathfrak{t}'}.$$

Mit $n \cdot \cos i$ bzw. $n' \cdot \cos i'$ multipliziert, folgt:

$$n \cdot \cos i \; di = \frac{n\, ds \cdot \cos^2 i}{-\mathfrak{t}} + \frac{n\, ds \cos i}{r}$$

bzw.

$$n \cdot \cos i' \, di' = \frac{n'\, ds \cdot \cos i'}{r} - \frac{n'\, ds \cdot \cos^2 i'}{\mathfrak{t}'}.$$

Aus dem Brechungsgesetz

$$n \cdot \sin i = n' \sin i'$$

folgt durch Differenzieren

$$n \cdot \cos i \, di = n' \cdot \cos i' \, di',$$

also ergibt sich

$$\frac{n\, ds \cdot \cos^2 i}{-\mathfrak{t}} + \frac{n\, ds \cdot \cos i}{r} = \frac{n'\, ds \cdot \cos i'}{r} - \frac{n'\, ds \cdot \cos^2 i'}{\mathfrak{t}'},$$

$$\frac{n' \cdot \cos^2 i'}{\mathfrak{t}'} - \frac{n \cdot \cos^2 i}{\mathfrak{t}} = \frac{n' \cdot \cos i' - n \cdot \cos i}{r}.$$

$$\boxed{\frac{n' \cdot \cos i' - n \cdot \cos i}{r} = D_{\mathrm{sch}}} \qquad \text{(IV 4,1)}$$

bezeichnet man in Analogie zum paraxialen Strahlengang als „schiefe“ Brechkraft D_{sch}, so daß nunmehr

$$\boxed{\frac{n' \cdot \cos^2 i'}{\mathfrak{t}'} - \frac{n \cdot \cos^2 i}{\mathfrak{t}} = D_{\mathrm{sch}}}. \qquad \text{(IV 4,2)}$$

Dies ist die tangentiale Abbildungsformel für ein außeraxiales unendlich wenig geöffnetes Strahlenbündel. (Tangentialer Strahl.) Für den Übergang zur folgenden Fläche gilt:

$$\mathfrak{t}_{+1} = \mathfrak{t}' - \tilde{d}',$$

wo $\tilde{d}'$ die „schiefe Dicke“, der längs des „Hauptstrahles“ des Bündels gemessene Abstand der folgenden von der betrachteten brechenden Fläche ist, der im Anschluß an die Berechnung des sagittalen Strahlverlaufs berechnet wird (s. u.).

b) *Berechnung des Verlaufs eines sagittalen Strahles*

Wir setzen jetzt (Abb. 26):

$$\overrightarrow{AO} = \mathfrak{s}\,, \quad \overrightarrow{AO'} = \mathfrak{s}'\,.$$

Aus der Figur folgt nun sofort für den Inhalt der Dreiecke OAM, MAO' und OAO' die Beziehung

$$\blacktriangle OAM + \blacktriangle MAO' = \blacktriangle OAO'.$$

Den Inhalt eines Dreiecks berechnen wir nach der Beziehung:

Inhalt = Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels.

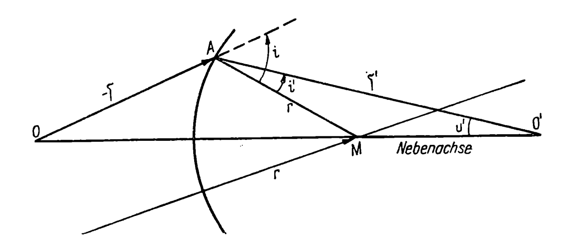


Abb. 26. Zur Berechnung des Verlaufes eines sagittalen Strahles durch ein optisches System.

Es ist also bei Berücksichtigung der Vorzeichen und der Tatsache, daß der Flächeninhalt der Dreiecke > 0 angenommen wurde:

$$-\,\mathfrak{s}\,r \cdot \sin i + \mathfrak{s}'\,r \cdot \sin i' = -\,\mathfrak{s}\mathfrak{s}' \sin(i - i')\,,$$

$$\frac{\sin i}{\mathfrak{s}'} - \frac{\sin i'}{\mathfrak{s}} = \frac{1}{r} \cdot \sin(i - i') \qquad \left(\text{durch Multiplikation mit} - \frac{1}{\mathfrak{s}\mathfrak{s}'\,r}\right).$$

Multipliziert man nun mit $n \cdot n'$ und berücksichtigt

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta\,,$$

so erhält man:

$$\frac{n'}{\mathfrak{s}'} \cdot n \sin i - \frac{n}{\mathfrak{s}} \cdot n' \sin i' = \frac{n \sin i \cdot n' \cos i' - n \cos i \cdot n' \sin i'}{r}\,.$$

Unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes $n \sin i = n' \sin i'$ kann man nun schreiben

$$\boxed{\frac{n'}{\mathfrak{s}'} - \frac{n}{\mathfrak{s}} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} = D_{\text{sch}}}\,. \qquad \text{(IV 4,3)}$$

Der Übergang auf eine zweite Fläche erfolgt nach folgenden Formeln (Abb. 27):

$$\mathfrak{s}_{+1} = \overrightarrow{A^{**}O'}\,,$$

$$\mathfrak{s}' = \overrightarrow{A^{*}O'},$$

$$\tilde{d}' = \overrightarrow{A^{*}A^{**}},$$

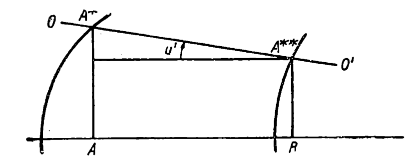


Abb. 27. Zu den „Übergangsformeln" und der „schiefen Dicke" $\tilde{d}'$ bei der Berechnung des Astigmatismus.

also gilt

$$\mathfrak{s}_{+1} = \mathfrak{s}' - \tilde{d}';$$

$$\tilde{d}' = \frac{\overrightarrow{AB}}{\cos u'}\,.$$

Nun ist nach Abb. 28

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1S_1} + \overrightarrow{S_1S_2} + \overrightarrow{S_2M_2} + \overrightarrow{M_2B}\,,$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{S_1S_2} + \overrightarrow{S_2M_2} + \overrightarrow{M_2B} + \overrightarrow{M_1S_1} + \overrightarrow{AM_1},$$

also

$$\tilde{d}' = \frac{\overrightarrow{AB}}{\cos u'} = \frac{d' + r_2\,(1 - \cos\varphi_2) - r_1\,(1 - \cos\varphi_1)}{\cos u'}\,,$$

wobei

$$d' = \overrightarrow{S_1S_2}\,.$$

Ferner ist:

$$\varphi_1 = u_1' + i_1'\,, \qquad \varphi_2 = u_2 + i_2\,.$$

Abb. 28. Zur Berechnung von $\overrightarrow{AB}$.

Auch für die (logarithmische) Berechnung des Astigmatismus sei nachstehend ein Rechenschema angegeben.

Es ist zunächst der vom gewählten außeraxialen Objektpunkt ausgehende Hauptstrahl des Strahlenbündels, dessen Astigmatismus bestimmt werden soll, nach den unter IV 3 angegebenen Formeln (und nach einem der dort — S. 45 bis S. 48 — angegebenen Rechenschema) durchzurechnen. Mit den hierbei gefundenen Werten der i_j, i_j', u_j rechnet man nach den vorstehend für die Astigmatismusberechnung angegebenen Formeln mit folgendem Rechenschema:

	log	Num
n'		
$\cos i'$		
$n' \cos i'$		
n		
$\cos i$		
$n \cos i$		
$\Delta\!\!\!\!|\;\, n \cos i$		
r		
D_{sch}		
$\mathfrak{s}$		
$n/\mathfrak{s}$		
$n'/\mathfrak{s}'$		
$\mathfrak{s}'$		
$n \cos^2 i$		—
$\mathfrak{t}$		
$(n \cos^2 i)/\mathfrak{t}$		
$n' \cos^2 i'$		—
$(n' \cos^2 i')/\mathfrak{t}$		
$\mathfrak{t}'$		

	log	Num
i_{+1}	—	
u_{+1}	—	
$\cos \varphi_{+1}$		
r_{+1}		
$r_{+1} \cos \varphi_{+1}$		
$r_{+1} - r_{+1} \cos \varphi_{+1}$	—	
r	(—)	(—)
$r \cos \varphi$	(—)	(—)
$r - r \cos \varphi$	—	
$\triangle(r - r \cos \varphi)$	—	
d'	—	
$d' + \triangle(r - r \cos \varphi)$		
$\cos u'$		
$\mathfrak{d}'$		
$\mathfrak{s}'$	—	
$\mathfrak{t}'$	—	
$\mathfrak{s}_{+1}$	—	
$\mathfrak{t}_{+1}$	—	

(—) bedeutet, daß diese Größen im allgemeinen aus der Berechnung (des Astigmatismus) für die vorhergehende Fläche bekannt sind und übernommen werden.

$$\triangle(r - r \cos \varphi) \text{ bedeutet: } (r_{+1} - r_{+1} \cos \varphi_{+1}) - (r - r \cos \varphi).$$

Das Zeichen $\Delta\!\!\!\!|\;\,$ wird „Strich-Delta" gelesen und bedeutet, daß von der hinter $\Delta\!\!\!\!|\;\,$ stehenden Größe der Wert *vor* der Brechung von dem *nach* der Brechung abzuziehen ist. Es ist also

$$\Delta\!\!\!\!|\;\, n \cos i = n' \cos i' - n \cos i .$$

Der Index $+1$ bedeutet, daß es sich hier um die betreffende Größe für die *nachfolgende* Fläche handelt.

5. Zur Berechnung des Komafehlers

Zur rechnerischen Bestimmung des Komafehlers eines optischen Systems betrachtet man ein Strahlenbündel mit endlichem Öffnungswinkel, das von

einem außeraxialen Punkt des „abzubildenden Objektes" ausgeht, und rechnet mehrere Strahlen dieses Strahlenbündels durch das System nach den in IV 3 angegebenen Formeln durch, wozu man zuvor für die betreffenden Strahlen rechnerisch die für die Durchrechnung erforderlichen Bestimmungsgrößen der Strahlen — z. B. die u- und $\bar{s}$-Werte oder die t- und u-Werte — ermittelt. Man wiederholt diese Durchrechnung noch für die entsprechend geneigten Strahlen der Strahlenbündel, die von einem oder verschiedenen anderen Punkten des Objektes ausgehen. Bei der Durchrechnung beschränkt man sich im allgemeinen auf solche Strahlen, die in der Meridianebene des betreffenden Objektpunktes verlaufen.

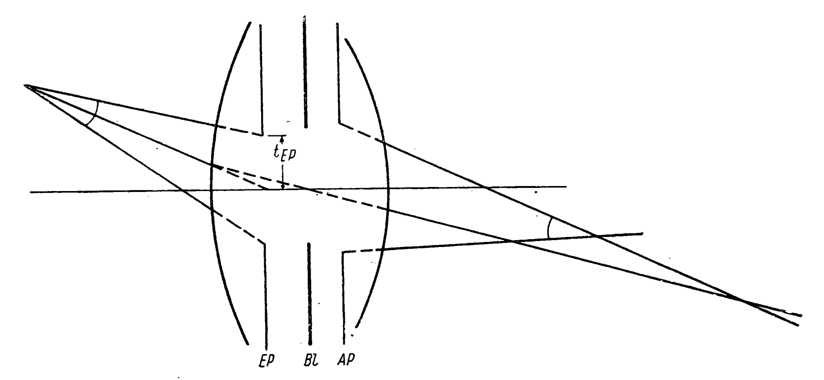


Abb. 29. Zur Berechnung des Komafehlers.

Den durch die Blendenmitte und demnach durch die Mitte der „Eintrittspupille" (EP), dem *objekt*seitigen Bild der Blende (Bl), sowie durch die Mitte der „Austrittspupille" (AP), dem *bild*seitigen Bild der Blende, gehenden Strahl bezeichnet man als Hauptstrahl[1]. Man rechnet mit Benutzung der unter IV 3 angegebenen Formeln etwa die fünf Strahlen mit den Einfallshöhen

$$t_{EP}, \quad t_{EP}\sqrt{0{,}5}, \quad 0, \quad -t_{EP}\sqrt{0{,}5}, \quad -t_{EP}$$

oder

$$\mathring{t}, \quad \mathring{t}\sqrt{0{,}5}, \quad 0, \quad -\mathring{t}\sqrt{0{,}5}, \quad -\mathring{t}$$

durch, wobei $\mathring{t}$ den Achsenabstand des Schnittpunktes des betreffenden Strahles mit der Blendenebene, t_{EP} den Achsenabstand seines Schnittpunktes mit der EP bedeutet. Der kleine Kreis (°) über dem t — und ebenso später über den andere Größen angebenden Symbolen — soll dabei auf die Blende hinweisen, die ja in fast allen Fällen eine kreisförmige Öffnung besitzt.

Diese vom gleichen Objektpunkt ausgegangenen (5) Strahlen (der Meridianebene) besitzen bildseitig im allgemeinen keinen wohldefinierten Schnittpunkt, sondern lassen erkennen, daß das zugehörige Strahlenbündel eine Kaustik,

[1] Sofern alle durch die Blendenöffnung hindurchgehenden Strahlen vom System hindurchgelassen werden (vgl. hierzu die betreffenden Bemerkungen in IV 1).

und zwar im allgemeinen eine *unsymmetrische* Kaustik, besitzt, wobei die Kaustik der geometrische Ort der (bildseitigen) Schnittpunkte je zweier benachbarter Strahlen des objektseitigen Strahlenbündels ist. Da wir hier nur Strahlen des Meridianschnittes durchgerechnet haben, erhalten wir natürlich nur eine kaustische Kurve, die Schnittkurve der Kaustik-Fläche mit der Meridianebene. Die Kaustik ist also die Enveloppe des (bildseitigen) Strahlenbündels[1].

6. Beispiel zur Verzeichnung und Bildfeldkrümmung

Ein einfaches, aber recht interessantes Beispiel zur Verzeichnung und Bildfeldkrümmung sei hier näher durchgerechnet. Ein achsensenkrechtes Objekt endlicher Größe befinde sich im „Scheitel" einer einzelnen brechenden Fläche (Abb. 30). Die Abbildung ist verzeichnet, die Vergrößerung also von Stelle zu Stelle verschieden.

Wir fragen, wie sich die Vergrößerung von Punkt zu Punkt des Objektes ändert, wenn die Abbildung *durch enge Bündel*, die durch eine *im Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche angebrachte Blende* begrenzt werden, erfolgt.

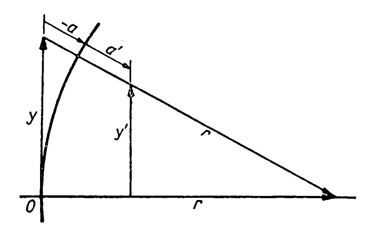


Abb. 30. Zu einem speziellen Beispiel der Verzeichnung bei gleichzeitig vorhandener Bildfeldwölbung, aber astigmatismusfreier und komafreier (asymmetriefehlerfreier) Abbildung sowie zur (umgekehrten) Benutzung der Anordnung zum Zwecke der Aufhebung bzw. Verringerung einer Bildfeldwölbung.

Nach II 8 fallen hier die Hauptpunkte im Punkt O, dem Flächenscheitel, zusammen. Für O gilt dann $\beta' = +1$ und $a_0 = a'_0 = 0$. Die Haupt„ebenen" sind mit der brechenden Fläche identisch, so daß wir besser (d. h.: richtig) von „Hauptpunktflächen" sprechen sollten.

Für irgendeinen Punkt y des Objektes gilt:

$$-a = \sqrt{y^2 + r^2} - r \quad \text{mit} \quad a = \overrightarrow{HO}\,(a' = \overrightarrow{H'O'}) .$$

Nun ist

$$D = \frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = \frac{n' - n}{r} \qquad \text{[siehe (II 5,3) oder (I 2,1)]}.$$

Also wird

$$\frac{n'}{a'} = \frac{(n' - n) \cdot a + n \cdot r}{a \cdot r}$$

oder

$$a' = \frac{n' a r}{a (n' - n) + n r} = \frac{n' r (r - \sqrt{y^2 + r^2})}{(r - \sqrt{y^2 + r^2})(n' - n) + n r}, \qquad a'_{y=0} = 0 \qquad \text{(IV 6,1)}$$

[1] Entsprechend erhalten wir ja auch bei dem von einem Achsenpunkt ausgehenden Strahlenbündel eine Kaustik, die hier aber rotationssymmetrisch zur Achse des Systems ist. Vgl. IV 2a.

Aus der Figur folgt:

$$\frac{y'}{y} = \frac{r - a'}{r - a} = \frac{r - \dfrac{n' r \,(r - \sqrt{y^2 + r^2})}{(n' - n)\,(r - \sqrt{y^2 + r^2}) + n\, r}}{\sqrt{y^2 + r^2}}$$

$$= \frac{r\,(n' - n)\,(r - \sqrt{y^2 + r^2}) + n\, r^2 - n' r\,(r - \sqrt{y^2 + r^2})}{\sqrt{y^2 + r^2}\,[(n' - n)\,(r - \sqrt{y^2 + r^2}) + n\, r\,]}$$

$$= \frac{r \cdot n}{n' r - n' \sqrt{y^2 + r^2} + n \sqrt{y^2 + r^2}}$$

$$= \frac{r \cdot n}{n' (r - \sqrt{y^2 + r^2}) + n \sqrt{y^2 + r^2}},$$

also

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{\left(\frac{n - n'}{n}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{y}{r}\right)^2 + 1} + \frac{n'}{n}}, \qquad \beta'_{y \to 0} = \left(\frac{y'}{y}\right)_{y \to 0} = 1\,. \quad \text{(IV 6,2)}$$

Das Bild eines im Scheitel einer brechenden Fläche und zu ihr tangential stehenden ebenen Objektes, das durch diese Fläche entworfen wird, ist also stark gekrümmt und stark verzeichnet, da a' und β' nach (IV 6,1) und (IV 6,2) von y abhängt. (Beachte die Umkehrung und ihre Bedeutung für die Bildfeldebnung!)

Die Durchrechnung der allgemeinen analogen Aufgaben, daß sich das (achsensenkrechte) Objekt nicht im Flächenscheitel, sondern in einigem Abstande vor dem Flächenscheitel befindet oder daß wir es mit zwei brechenden Flächen zu tun haben, die sich in einem vorgegebenen Abstand voneinander befinden, sei dem Leser überlassen und empfohlen.

7. Trigonometrische Durchrechnung eines in der Meridianebene verlaufenden Strahles bei beliebiger (asphärisch-)rotationssymmetrischer Fläche

Haben wir es nicht mit Kugelflächen zu tun, sondern mit irgendwelchen anderen rotationssymmetrischen Flächen als Trennungsflächen der verschiedenen Medien, etwa mit Paraboloid-, Ellipsoid-, Hyperboloid- oder anderen asphärischen Flächen, so sind die in IV 3 für Brechung (und Spiegelung) an Kugelflächen abgeleiteten Formeln nicht mehr ohne weiteres anwendbar. Wir können dann folgendermaßen vorgehen: Wir wählen ein Koordinatensystem so, daß die z-Achse mit der optischen Achse, die Positivrichtung der z-Achse mit der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes, der Koordinatenursprungspunkt mit dem „Flächenscheitel“ S, dem Schnittpunkt der optischen Achse mit der betreffenden brechenden oder spiegelnden Fläche, zusammenfällt.

Die Einfallsebene wählen wir als yz-Ebene. Wegen der Rotationssymmetrie können wir uns dann wieder auf diesen Meridianschnitt bei den folgenden Ab-

leitungen beschränken. Die Schnittkurve der betreffenden Rotationsfläche mit der yz-Ebene sei gegeben durch die Gleichung

$$y = g(z). \qquad \text{(IV 7,1)}$$

Die Gleichung des Lichtstrahles ist

$$y = (\tilde{s} - z)\,\mathrm{tg}\,u, \qquad \text{(IV 7,2)}$$

wobei die oben (in I 1) eingeführte Zählweise von u berücksichtigt wurde. Aus beiden Gleichungen ergeben sich als Schnittpunktskoordinaten die Koordinaten z_I, y_I des Punktes I, in dem der Strahl die Fläche trifft. Wir bestimmen dann $\left(\frac{dg(z)}{dz}\right)_I$ für $z = z_I$. Dies gibt uns die Richtung der Tangente im Punkte I an die Kurve $y = g(z)$. Unter Beachtung der in I 1 eingeführten Zählweise des Winkels φ der Flächennormalen (im Punkte I) mit der Symmetrieachse der Fläche wird — wenn wir ihren gemeinsamen Schnittpunkt durch C bezeichnen und $\overrightarrow{SC} = z_C$ gesetzt wird —

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{\left(\frac{dg}{dz}\right)_I} = \frac{y_I}{z_C - z_I} \qquad \text{(IV 7,3)}$$

und

$$z_C = z_I + y_I \left(\frac{dg}{dz}\right)_I. \qquad \text{(IV 7,4)}$$

Wir setzen

$$\sqrt{(z_C - z_I)^2 + y_I^2} = \frac{z_C - z_I}{\cos\varphi} = r_{\mathfrak{f}}, \qquad \text{(IV 7, 5)}$$

so daß also $r_{\mathfrak{f}} = r_{\mathfrak{f}}\,(z_I)$ eine Funktion des Treffpunktes I ist.

An Stelle von (IV 3, 1_3) und (IV 3,4) gelten dann folgende Formeln:

$$\sin i = \frac{\tilde{s} - z_C}{r_{\mathfrak{f}}} \sin u, \qquad \text{(IV 7,6)}$$

$$\tilde{s}' = z_C + r_{\mathfrak{f}} \frac{\sin i'}{\sin u'} \qquad \text{(IV 7, 7)}$$

— in denen $\tilde{s} - z_C$ und $\tilde{s}' - z_C$ unserem c bzw. c' der Abb. 20 (S. 44) entspricht —, während (IV 3,5), (IV 3, 3_1) unverändert bleiben.

8. Abbildungsgleichung der Sagittalstrahlen für rotationssymmetrische asphärische Flächen

In der Abb. 31 stelle wieder SI den Schnitt der als rotationssymmetrisch vorausgesetzten j-ten brechenden Fläche mit der den Hauptstrahl $\overrightarrow{IP_{\mathfrak{f}}}$ des Elementarbündels enthaltenden Meridianebene dar. $\overrightarrow{JP_{\mathfrak{f}}}$ sei der eine der beiden zu $\overrightarrow{IP_{\mathfrak{f}}}$ in der *Sagittal*ebene benachbarten Lichtstrahlen. $P_{\mathfrak{f}}$ ist ihr gemeinsamer Schnittpunkt vor der Brechung, der sagittale Objektpunkt, I und J die Schnittpunkte dieser Strahlen mit der brechenden Fläche. $C_{\mathfrak{f}}$ sei der zum Sagittalschnitt der brechenden Fläche gehörige Krümmungsmittelpunkt. Den

zugehörigen Krümmungsradius bezeichnen wir durch $r_{\mathfrak{s}}$, wo $r_{\mathfrak{s}}$ im allgemeinen Funktion der Lage des Punktes I ist. Den Flächenindex j lassen wir der übersichtlicheren Schreibweise wegen bei der folgenden Ableitung überall fort.

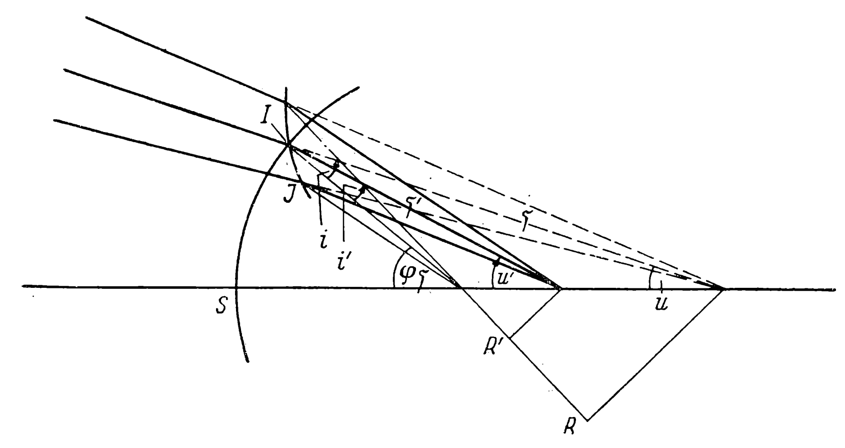


Abb. 31. Zur Ableitung der Abbildungsgleichung der Sagittalstrahlbüschel für beliebige (asphärische) rotationssymmetrische Flächen.

Die Strahlen $\overrightarrow{IP_{\mathfrak{s}}}$ und $\overrightarrow{JP_{\mathfrak{s}}}$ liegen auf einem Kegelmantel, dessen Achse die Verbindungslinie $\overrightarrow{C_{\mathfrak{s}}P_{\mathfrak{s}}}$ ist. In dieser Geraden schneiden sich auch die beiden Einfallsebenen von $\overrightarrow{IP_{\mathfrak{s}}}$ und $\overrightarrow{JP_{\mathfrak{s}}}$. Die gebrochenen Strahlen müssen daher beide gleichfalls die Gerade $\overrightarrow{C_{\mathfrak{s}}P_{\mathfrak{s}}}$ schneiden, und zwar wegen der vorliegenden Rotationssymmetrie um $\overrightarrow{C_{\mathfrak{s}}P_{\mathfrak{s}}}$ im gleichen Punkt. Wir nennen ihn $P'_{\mathfrak{s}}$ und bezeichnen ihn als sagittalen Bildpunkt. Dieser Punkt $P'_{\mathfrak{s}}$ ist identisch mit dem Punkt O' der Abb. 4 (S. 8), wenn $P_{\mathfrak{s}}$ als identisch mit O jener Abbildung vorausgesetzt wird. Während wir dort aber zur Lagebestimmung von O' die Länge $S\,O'$ berechneten, fragen wir hier nach der Länge von $\overrightarrow{IP'_{\mathfrak{s}}}$, der Bildpunktentfernung längs des „Hauptstrahles" unseres schief einfallenden „Elementarbündels". Wir bezeichnen $\overrightarrow{IP'_{\mathfrak{s}}}$ durch $\mathfrak{s}'$ und entsprechend $IP_{\mathfrak{s}}$ durch $\mathfrak{s}$.

Einfalls- und Brechungswinkel seien wie oben i bzw. i'. Ferner sei $\varphi_{\mathfrak{s}}$ der Winkel $\sphericalangle IC_{\mathfrak{s}}S$, den $\overrightarrow{IC_{\mathfrak{s}}}$ mit $\overrightarrow{C_{\mathfrak{s}}P_{\mathfrak{s}}}$ bildet. Wir fällen von $P_{\mathfrak{s}}$ und $P'_{\mathfrak{s}}$ Lote auf $IC_{\mathfrak{s}}$. Ihre Fußpunkte seien R bzw. R'. Dann ist

$$\operatorname{ctg}\varphi_{\mathfrak{s}} = \frac{\overrightarrow{C_{\mathfrak{s}}R}}{\overrightarrow{RP_{\mathfrak{s}}}} = \frac{\overrightarrow{C_{\mathfrak{s}}R'}}{\overrightarrow{R'P'_{\mathfrak{s}}}}, \qquad \text{(IV 8,1)}$$

$$\frac{\mathfrak{s}\cos i - r_{\mathfrak{s}}}{\mathfrak{s}\sin i} = \frac{\mathfrak{s}'\cos i' - r_{\mathfrak{s}}}{\mathfrak{s}'\sin i'}$$

oder wegen

$$\sin i : \sin i' = n' : n$$

$$\mathfrak{s}\mathfrak{s}' n \cos i - \mathfrak{s}' n r_{\mathfrak{t}} = \mathfrak{s}\mathfrak{s}' n' \cos i' - \mathfrak{s}\, n' r_{\mathfrak{t}},$$

$$\frac{n'}{\mathfrak{s}'} - \frac{n}{\mathfrak{s}} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_{\mathfrak{t}}}, \qquad \text{(IV 8,2)}$$

wofür wir auch kürzer — wie oben — schreiben können:

$$\Delta\left(\frac{n}{\mathfrak{s}}\right) = \frac{1}{r_{\mathfrak{t}}} \cdot \Delta\,(n \cos i), \qquad \text{(IV 8,3)}$$

$$n\left(\frac{\cos i}{r_{\mathfrak{t}}} - \frac{1}{\mathfrak{s}}\right) = n'\left(\frac{\cos i'}{r_{\mathfrak{t}}} - \frac{1}{\mathfrak{s}'}\right) = Q_{\mathfrak{t}}. \qquad \text{(IV 8,4)}$$

9. Abbildungsgleichung der Tangentialstrahlen für rotationssymmetrische asphärische Flächen

In Abb. 32 ist wie vorher SI der Schnitt der rotationssymmetrischen brechenden Fläche mit der den Strahl $\overrightarrow{IP_t}$ enthaltenden Meridianebene. $\overrightarrow{JP_t}$ sei ein in der gleichen Ebene verlaufender Nachbarstrahl. Der gemeinsame Schnittpunkt, der tangentiale Objektpunkt, ist P_t. Der zugehörige *tangentiale* Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche sei C_t, der zugehörige tangentiale

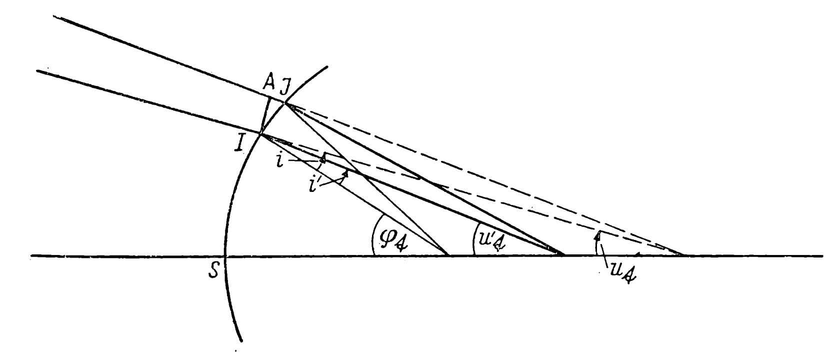


Abb. 32. Zur Ableitung der Abbildungsgleichung der Tangentialstrahlbüschel für beliebige (asphärische) rotationssymmetrische Flächen.

Krümmungsradius sei r_t, wobei r_t im allgemeinen Funktion der Lage des Punktes I auf der brechenden Fläche ist. Die Einfallswinkel der Strahlen $\overrightarrow{IP_t}$ und $\overrightarrow{JP_t}$ sind hier etwas voneinander verschieden. Sie seien durch i und $i + di$ bezeichnet. Entsprechend seien i' und $i' + di'$ die Brechungswinkel. Die gebrochenen Strahlen liegen in der gleichen Meridianebene wie die beiden einfallenden Strahlen. Ihr Schnittpunkt, der tangentiale Bildpunkt, sei P_t'. Er

wird im allgemeinen *nicht streng* auf der Objektpunkt und Krümmungsmittelpunkt verbindenden Geraden liegen, sondern diese Gerade wird von den beiden gebrochenen Strahlen in verschiedenen Punkten geschnitten. Die Winkel von $\overrightarrow{IC_t}$ und $\overrightarrow{JC_t}$ mit der Verbindungsgeraden $\overrightarrow{C_tP_t}$ seien φ_t und $\varphi_t + d\varphi_t$. Wir setzen noch $\overrightarrow{IP_t} = \mathfrak{t}$ und $\overrightarrow{IP'_t} = \mathfrak{t}'$. Endlich seien $u, u + du, u', u' + du'$ die Winkel von $\overrightarrow{IP_t}$, $\overrightarrow{JP_t}$, $\overrightarrow{IP'_t}$, $\overrightarrow{JP'_t}$ mit der Geraden $\overrightarrow{C_tP_t}$. Nach dem Brechungsgesetz ist

$$n \sin i = n' \sin i'.$$

Differenzieren wir dies, so wird

$$n \cos i \, di = n' \cos i' \, di'. \tag{IV 9,1}$$

Nun ist

$$i = \varphi_t - u \qquad \text{und} \qquad i' = \varphi_t - u',$$

also

$$di = \left(1 - \frac{du}{d\varphi_t}\right) d\varphi_t \qquad \text{und} \qquad di' = \left(1 - \frac{du'}{d\varphi_t}\right) d\varphi_t.$$

Ein mit $\overline{P_tI}$ um P_t geschlagener Kreisbogen treffe $\overline{P_tJ}$ in A. Dann ist

$$du = \frac{\overline{IA}}{\mathfrak{t}} = \frac{\overline{IJ}}{\mathfrak{t}} \cos i; \qquad du' = \frac{\overline{IJ}}{\mathfrak{t}'} \cos i'; \qquad d\varphi = \frac{\overline{IJ}}{r_t},$$

demnach

$$\frac{di'}{di} = \frac{1 - \dfrac{r_t}{\mathfrak{t}'} \cos i'}{1 - \dfrac{r_t}{\mathfrak{t}} \cos i} = \frac{\dfrac{1}{r_t} - \dfrac{\cos i'}{\mathfrak{t}'}}{\dfrac{1}{r_t} - \dfrac{\cos i}{\mathfrak{t}}}.$$

Setzen wir dies in (IV 9,1) ein, so ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$\frac{n' \cos^2 i'}{\mathfrak{t}'} - \frac{n \cos^2 i}{\mathfrak{t}} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t}, \tag{IV 9,2}$$

$$\Delta\!\!\!\!\!\!|\;\left(\frac{n \cos^2 i}{\mathfrak{t}}\right) = \frac{1}{r_t} \Delta\!\!\!\!\!\!|\;(n \cos i), \tag{IV 9,3}$$

$$n \left(\frac{\cos i}{r_t} - \frac{\cos^2 i}{\mathfrak{t}}\right) = n' \left(\frac{\cos i'}{r_t} - \frac{\cos^2 i'}{\mathfrak{t}'}\right) = Q_t \tag{IV 9,4}$$

als Abbildungsgleichung der Tangentialstrahlen.

V. Weitere Betrachtungen über Abbildungsfehler

In Abschnitt IV sprachen wir bereits von den Abbildungsfehlern, den Aberrationen eines optischen Systems. Wir sahen, daß es — in den Grenzen der Abbildung dritter Ordnung — verschiedene Arten von Abbildungsfehlern gibt, nämlich die sphärische Aberration, den Astigmatismus, den Komafehler, die Verzeichnung und die Bildfeldwölbung, zu denen bei Berücksichtigung von Potenzen bzw. Produkten (der Achsenabstände der Objektpunkte und der Neigungswinkel der abbildenden Strahlen gegen die Symmetrieachse) von höherer Ordnung als der dritten noch weitere Arten von Abbildungsfehlern hinzukommen, auf die wir aber im Rahmen dieses Buches nicht eingehen können.

Diese verschiedenen Abbildungsfehler treten natürlich nicht fein säuberlich getrennt voneinander auf, sondern überlagern sich gegenseitig, so daß man es in allen praktischen Fällen mit einer derartigen Bildfehlerüberlagerung zu tun hat, die man als „Gesamtaberration" zu bezeichnen pflegt.

Hinzu kommt, daß bereits bei dem Übergang der Strahlen von einem Medium zu dem folgenden, also bei jeder einzelnen Fläche und der durch sie bewirkten Brechung (und Spiegelung), alle diese Fehler selbst auftreten können sowie auch ihre Überlagerung, die sich ihrerseits natürlich bei der folgenden (sowie jeder weiteren) Brechung (bzw. Spiegelung) in einer Modifizierung — nach Art und Größe — der Abbildungsfehler auswirkt, die jene Flächen bzw. Brechungen für sich allein hervorrufen würden.

Wir betrachten daher nachfolgend (nach Berek) den von den einzelnen Flächen herrührenden Anteil an der Gesamtaberration, da die Berechnung jener Anteile oft zeigt, welche Fläche besonders stark zu einer Bildverschlechterung beiträgt.

1. Anteil der einzelnen Flächen an der Gesamtaberration des Systems

Wir betrachten ein achsensenkrechtes Objekt und einen von einem (etwa außeraxialen) Punkt dieses Objektes ausgehenden Strahl der Neigung u gegen die optische Achse. Der betreffende Objektpunkt habe den Abstand y_1 von der Achse. Bei *idealer* Abbildung würde er die dem Objekt (paraxial-)konjugierte achsensenkrechte Bildebene im Achsenabstand $\underline{\overset{\times}{y}'_k = \beta' y_1}$ durchstoßen.

Infolge der Aberrationen ist der tatsächliche Achsenabstand $(y'_k)_u$ jenes Durchstoßungspunktes $\neq \beta' y_1$ und von u abhängig.

$(y'_k)_u - \check{y}'_k = (\triangle y'_k)_u = \triangle y'_k$ ist also die (laterale) Abweichung vom idealen Durchstoßungspunkt $\check{y}'_k$ des betreffenden Strahles mit der (paraxialen) Bildebene. Wir berechnen nachstehend diese Abweichung.

Da ein von einem außeraxialen Objektpunkt ausgehender Strahl der Meridianebene als ein Strahl aufgefaßt werden kann, der von einem mit dem Achsenpunkt des Objektes *nicht* zusammenfallenden zweiten Achsenpunkt ausgeht, bezeichnen wir den Abstand seines Achsenschnittpunktes vom Scheitel der brechenden Fläche (wieder) durch $\tilde{z}$ bzw. $\tilde{z}'$ (mit einem die brechende Fläche angebenden Index).

$\triangle y'_1$ sei die laterale Abweichung vom idealen Bildpunkt, die durch die erste Fläche hervorgerufen wird, in der durch diese erste Fläche erzeugten, der Objektebene konjugierten Bildebene.

$$\triangle y'_1 = y'_1 - \check{y}'_1 .$$

$\check{y}'_1$ ist der Achsenabstand des Punktes der idealen Abbildung (Sollwert), der aus dem Abbildungsverhältnis folgt: $\check{y}'_1 = \beta'_1 y_1$.

Aus dem Strahlengang (Abb. 33) folgt:

$$y'_1 = (\tilde{z}'_1 - s'_1) \operatorname{tg} u'_1 ,$$

also

$$\triangle y'_1 = (\tilde{z}'_1 - s'_1) \operatorname{tg} u'_1 - \beta'_1 y_1 .$$

Abb. 33. Zur Bestimmung des Anteils der einzelnen Fläche an der Größe der Strahlabweichung (in der Bildebene) vom idealen Bildort.

Es sei angenommen, $\triangle y'_1$ werde durch die anderen Flächen ideal abgebildet. $\triangle_1 y'_k$ gibt uns dann die Größe des Bildfehlers, erzeugt durch die erste Fläche und *ideal* (also fehlerfrei) abgebildet durch die zweite bis k-te Fläche. Der erste (vordere) Index von y' beziehe sich dabei auf die Fläche, durch die der Fehler verursacht wird, der zweite (hintere) Index beziehe sich auf die letzte der folgenden Flächen, durch die er (nach Annahme „ideal") abgebildet wird.

Es folgt also

$$\triangle_1 y'_k = \beta'_2 \beta'_3 \beta'_4 \cdots \beta'_k \cdot \triangle y'_1 .$$

Durch Einführung der Gesamtvergrößerung

$$\beta' = \beta'_1 \cdot \beta'_2 \cdot \beta'_3 \cdots \beta'_k$$

folgt

$$\triangle_1 y'_k = \frac{\beta'}{\beta'_1} \triangle y'_1 = \frac{\beta'}{\beta'_1} (\tilde{z}'_1 - s'_1) \operatorname{tg} u'_1 - \beta' y_1 .$$

Die durch die erste und zweite Fläche hervorgerufene *Abweichung* $\triangle y_2'$ ergibt sich zu:

$$\triangle y_2' = (\bar{z}_2' - s_2') \operatorname{tg} u_2' - \beta_1' \beta_2' y_1 .$$

Der Abbildungsfehler der zweiten Fläche allein ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} \triangle y_2' - \triangle_1 y_2' &= \triangle y_2' - \beta_2' (\bar{z}_1' - s_1') \operatorname{tg} u_1' + \beta_1' \beta_2' y_1 \\ &= \triangle y_2' - \beta_2' \cdot \triangle y_1' . \end{aligned}$$

Dieser Fehler würde — durch die weiteren Flächen ideal abgebildet — die Abweichung

$$\triangle_2 y_k' = \beta_3' \cdot \beta_4' \cdots \beta_k' (\triangle y_2' - \beta_2' \cdot \triangle y_1')$$

ergeben, also

$$\begin{aligned} \triangle_2 y_k' &= \beta_3' \cdot \beta_4' \cdots \beta_k' [(\bar{z}_2' - s_2') \operatorname{tg} u_2' - \beta_1' \beta_2' y_1 - \beta_2' \triangle y_1'] \\ &= \frac{\beta'}{\beta_1' \beta_2'} (\bar{z}_2' - s_2') \operatorname{tg} u_2' - \beta' y_1 - \triangle_1 y_k' , \end{aligned}$$

wobei β' wieder die Gesamtvergrößerung ist.

So fortfahrend finden wir eine Rekursionsformel. Der von der j-ten Fläche herrührende Abbildungsfehler ergibt sich — unter der Annahme, daß er durch die folgenden Flächen ideal abgebildet wird — nunmehr zu

$$\boxed{\triangle_j y_k' = \frac{\beta}{\prod_1^j \beta_i'} (\bar{z}_j' - s_j') \operatorname{tg} u_j' - \beta' y_1 - \sum_{i=1}^{j-1} \triangle_i y_k'} . \qquad \text{(V 1,1)}$$

$\triangle_j y_k'$ ist der Anteil der j-ten Fläche am gesamten Bildfehler, wie er in der Bildebene nach der k-ten Fläche abgebildet wird. [Diese Formel scheint von Berek erstmalig abgeleitet zu sein.]

Spezialfälle:

a) Handelt es sich um einen von einem Achsenpunkt ausgehenden Strahl, so ist in (V 1,1)

$$y_1 = 0 , \quad \overset{\times}{y}{}_1' = 0 , \quad \text{also} \quad \beta' y_1 = 0 ,$$

aber im allgemeinen

$$\triangle_j y_k' \neq 0 .$$

b) Handelt es sich um ein unendlich weit entferntes Objekt, so muß man den Bildfeldwinkel einführen.

Nach (II 2,1) und (I 3,2) — mit $x_\infty = s_\infty$ — gilt:

$$\beta' y_1 = \frac{-f}{x} y_1 = \frac{n_1}{n_k'} \cdot f' \cdot \frac{y_1}{x} = -\frac{n_1}{n_k'} f' \cdot \operatorname{tg} w_1$$

und nach (I 3,3) und (I 4,1):

$$\frac{\beta'}{\beta_1'} = \prod_2^k \beta_i' = \frac{n_2}{n_k'} \prod_2^k \frac{s_i'}{s_i} = \frac{n_1}{n_k'} \cdot \frac{n_2}{n_1} \prod_2^k \frac{s_i'}{s_i}$$

$$= \frac{n_1'}{n_1 \cdot s_1'} \cdot \frac{n_1}{n_k'} \cdot s_1' \prod_2^k \frac{s_i'}{s_i} = \frac{f}{f_1} \text{ (mit } n_1' = n_2\text{)},$$

also

$$\frac{\beta'}{\beta_1'} = \frac{\frac{n_1}{n_k'} \cdot f'}{\frac{n_1}{n_1'} \cdot f_1'} = \frac{D_1}{D},$$

wobei

D = Brechkraft des Gesamtsystems,
D_1 = Brechkraft der ersten Fläche.

Damit wird — mit $(D)_j = D_{1 \to j}$ = Brechkraft des Teilsystems *bis* zur j-ten Fläche —

$$\triangle_j y_k' = \frac{(D)_j}{D} (\bar{z}_j' - s_j') \operatorname{tg} u_j' - \sum_{i=1}^{j-1} \triangle_i y_k' + \frac{n_1}{n_k'} f' \operatorname{tg} w_1, \qquad \text{(V 1,2)}$$

worin noch $+\frac{n_1}{n_k'} f' = +\frac{n_1}{D}$ und w_1 (> 0) der objektseitige Bildfeldwinkel ist.

2. Darstellung der Bildfehler

Man trägt die Abweichungen $\triangle y_k'$ der Schnittpunkte der — einen Objektpunkt abbildenden — Meridionalstrahlen mit der (paraxialen) Bildebene (oder einer dazu im geeigneten Abstande parallelen Ebene) von dem Sollschnittpunkt y_k' über t_1 (besser: über $\mathring{t} = t_{\text{Blende}}$ oder t_{EP}) oder über $(w_1 - u_1)$ auf[1], und zwar für den axialen und verschiedene außeraxiale Objektpunkte bzw. (z. B. bei unendlich entferntem Objekt) für verschiedene Bildfeldwinkel w_1, unter denen die Objektpunkte von der EP aus erscheinen.

Man erhält so Darstellungen der $\triangle y_k'$ in Abhängigkeit von der gewählten Variablen — z. B. t — für die verschieden weit von der Achse entfernten Objektpunkte — z. B. $y_1 = 0$, $y_1 = y_1^*$, $y_1 = y_1^{**}$ $(= 2\,y_1^*)$ oder $w_1 = 0$, $w_1 = w_1^*$, $w_1 = w_1^{**}$ $(= 2\,w_1^*)$ —, wie dies Abb. 34 zeigt. Dabei ist es vorteilhaft, in jeder der für die verschiedenen Achsenabstände der Objektpunkte geltenden Darstellung die $\triangle y_k'$ für verschiedene Wellenlängen einzutragen, um so auch gleich einen Überblick über die — oben nur kurz erwähnten — chromatischen Bildfehler zu gewinnen.

[1] t_{EP} = Achsenabstand des Strahlenschnittpunktes mit der Eintrittspupille, dem objektseitigen Bild der den abbildenden Strahlenkegel begrenzenden Blende.

Denkt man sich die Kurven auf die Ordinatenachse projiziert, so hat man unmittelbar die Schnitt„linie" des meridionalen Strahlenbündels mit der Bildebene, d. h.: das „Bild" eines Objektpunktes ist selbst kein Punkt mehr, sondern eine Linie, solange wir nur Strahlen der Meridianebene zulassen.

Man kann aus einer solchen Darstellung auch einen Überblick über die Größe der einzelnen (meridionalen) Bildfehler gewinnen, nämlich über:

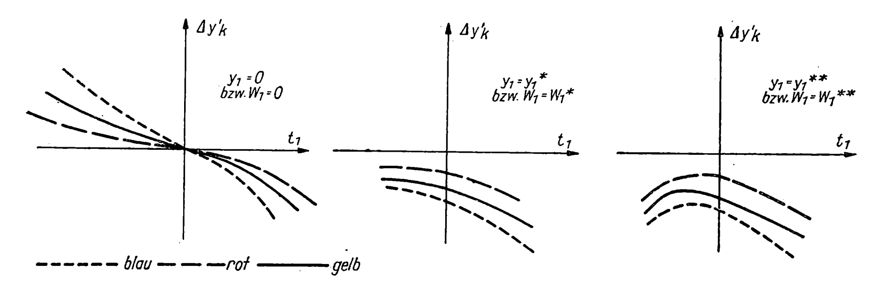


Abb. 34. Zur graphischen Darstellung der Strahlabweichung in der Bildebene vom idealen Bildort in Abhängigkeit von den Strahlkoordinaten bei gegebenem Objektpunkt (und zwar für verschiedene Achsenabstände des Objektpunktes) und für verschiedene Wellenlängen λ.

a) *sphärische Aberration*

Sphärische Aberration ist vorhanden, wenn man für einen Achsenpunkt ($w_1 = 0$ bzw. $y_1 = 0$) kein Zusammenfallen der Kurve mit der Abszisse bekommt. Die Abweichungen von der Abszisse sind antisymmetrisch. Für außeraxiale Objektpunkte fällt (auch bei behobener sphärischer Aberration) die Kurve im allgemeinen nicht mit der Abszisse oder einer zu ihr parallelen Geraden zusammen. Die Abweichungen der Strahlen von dem (idealen) Bild*punkt* ergeben sich aus den Abweichungen der Kurve gegen die durch die Kurvenmitte gehende, zur Abszisse parallele Gerade.

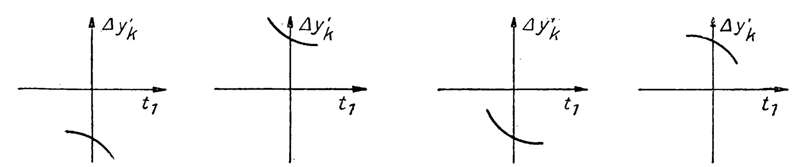
b) *Verzeichnung*

Eine eventuell vorliegende Verzeichnung erkennt man daran, daß die Kurven für $y_1 \neq 0$ bzw. $w_1 \neq 0$ die Abszisse nicht mehr in der Kurvenmitte (Hauptstrahl des Bündels) oder eventuell überhaupt nicht mehr schneiden (evtl. bekommt man auch *zwei* Schnittpunkte). *Welcher Art* — kissen- oder tonnenförmig — die Verzeichnung ist, erkennt man — wie man leicht überlegt — durch den Vergleich der zu verschiedenen y_1-Werten ($y_1 = y_1^*$, $y_1 = y_1^{**}$) gehörigen $\triangle y_k'$-Kurven. Nimmt nämlich der Abstand der Kurve (längs der $\triangle y_k'$-Achse) von der t-Achse mit wachsendem Achsenabstand y_1 des Objektpunktes relativ $\left.\begin{matrix}\text{stärker}\\\text{schwächer}\end{matrix}\right\}$ als y_1 zu und ist für $\overset{\times}{y}_k' < 0$ das $\triangle y_k' < 0$ bzw. für $\overset{\times}{y}_k' > 0$ das $\triangle y_k' > 0$, so liegt $\left\{\begin{matrix}\text{kissenförmige}\\\text{tonnenförmige}\end{matrix}\right.$ Verzeichnung vor.

Ist dagegen für $\overset{\times}{y}'_k < 0$ das $\triangle y'_k > 0$ oder für $\overset{\times}{y}'_k > 0$ das $\triangle y'_k < 0$, so liegen die Verhältnisse umgekehrt.

c) *Koma*

Zeigt die Kurve keinen antisymmetrischen Verlauf zur Kurvenmitte, so besitzt die Abbildung einen Komafehler. Man hat Außen- und Innenkoma zu unterscheiden. Besitzen $\overset{\times}{y}'_k$ und das $\triangle y'_k$ des Hauptstrahles gleiches Vorzeichen, so gilt (Abb. 35) folgendes: Ist die Kurve $\triangle y'_k$ konvex gegen die t_1- bzw. w_1-Achse, so besitzt das System Außenkoma, ist $\triangle y'_k$ konkav gegen die t_1- bzw. w_1-Achse, so liegt Innenkoma vor. Besitzen $\overset{\times}{y}'_k$ und $\triangle y'_k$ entgegengesetztes Vorzeichen, so liegen die Verhältnisse bezüglich Außen- und Innenkoma gerade umgekehrt.



Bei $\overset{\times}{y}'_k < 0 \leftarrow$ Außenkoma $\rightarrow$ bei $\overset{\times}{y}'_k > 0$	Bei $\overset{\times}{y}'_k < 0 \leftarrow$ Innenkoma $\rightarrow$ bei $\overset{\times}{y}'_k > 0$
Bei $\overset{\times}{y}'_k > 0 \leftarrow$ Innenkoma $\rightarrow$ bei $\overset{\times}{y}'_k < 0$	Bei $\overset{\times}{y}'_k > 0 \leftarrow$ Außenkoma $\rightarrow$ bei $\overset{\times}{y}'_k < 0$.

Abb. 35. Zur Beurteilung des Komafehlers eines optischen Systems auf Grund der graphischen Darstellung (nach Abb. 34) der Strahlabweichung in der Bildebene vom idealen Bildort.

d) *Meridionale Bildfeldkrümmung*

Die Bildfeldkrümmung ist — wie aus Abb. 36 unmittelbar folgt bzw. zu ersehen ist — zum Objektiv hin $\begin{matrix}\text{konkav}\\ \text{konvex}\end{matrix}\left(\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\ \text{Bildfeldkrümmung}\right)$, wenn die Tangente an die $\triangle y'_k$-Kurve in der Kurven*mitte* auf der Seite der positiven t bzw. $\overset{\circ}{t}$ nach $-\triangle y'_k$ hin geneigt ist und umgekehrt, d. h., wenn

$$\left(\frac{d}{d\overset{\circ}{t}} \triangle y'_k\right)_{\overset{\circ}{t}=0} \lessgtr 0$$

ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Abbildung ohne Zwischenbild (oder mit einer *geradzahligen* Anzahl von Zwischenbildern) erfolgt. Gibt es zwischen dem Objekt und dem Bild noch ein Zwischenbild (oder eine *ungradzahlige* Anzahl von Zwischenbildern), so ist die Bildfeldkrümmung $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$, wenn

$$\left(\frac{d}{d\overset{\circ}{t}} \triangle y'_k\right)_{\overset{\circ}{t}=0} \gtrless 0 \quad \text{ist.}$$

e) *Vignettierung*

Diese liegt vor, wenn die Kurven für negative und positive Werte von $\mathring{t}$ nicht bis zu gleichen $\mathring{t}$-Werten reichen, so daß nach der einen Seite nur ein dem Betrage nach geringerer Öffnungswinkel existiert als nach der anderen Seite.

f) *Chromasie*

Die chromatische Vergrößerungsdifferenz folgt sofort, wenn man die entsprechenden Kurven $\triangle y'_k(\mathring{t})$ auf Grund der Durchrechnung für verschiedene Farben (Wellenlängen) zeichnet, aus dem Abstand, den diese Kurven an der Stelle $\mathring{t} = 0$ (bzw. $w_1 = 0$) gegeneinander besitzen.

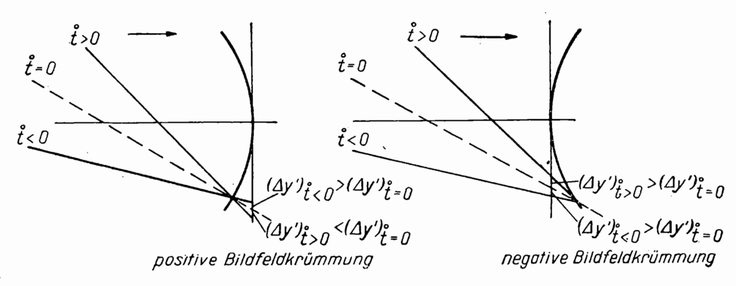


Abb. 36. Zur Beurteilung der meridionalen Bildfeldkrümmung einer optischen Abbildung auf Grund der graphischen Darstellung (nach Abb. 34) der Strahlabweichung in der Bildebene vom idealen Bildort.

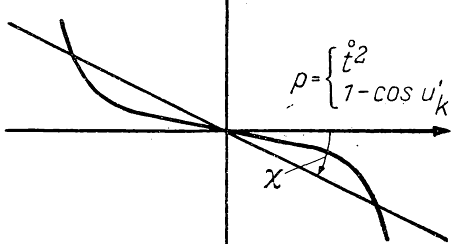
Es ist oft vorteilhafter, sich bei der Darstellung der Bildfehler nicht auf die paraxiale Bildebene zu beziehen, sondern auf eine ihr parallele Bildebene (Einstellebene), deren Abstand von der paraxialen Bildebene durch q bezeichnet sei, wobei diese nach wellenoptischen Überlegungen[1] folgendermaßen bestimmt werden soll: Man wähle etwa $\mathring{t}^2 = p$ oder $1 - \cos u'_k \left(\approx \frac{u'^2_k}{2}\right) = p$ als Abszisse eines Koordinatensystems und trage über p die zugehörigen Werte der „Wellenaberration" ($\equiv$ „Lichtwegaberration") l auf, die zum Achsenschnittpunkt $y_1 = 0$ des Objektes gehören und sich aus den zugehörigen $(\triangle s'_k)_{y_1=0}$ — als Funktion von p gedacht — durch $l = \int_0^p (\triangle s'_k)_{y_1=0}\, dp$ ergeben. Es läßt sich dann leicht eine gegen die Abszisse geneigte Gerade so in die Darstellung einzeichnen (Abb. 37), daß die vertikalen Abstände der Wellenaberrationskurve von jener Geraden möglichst gering werden. Aus der Neigung χ dieser Geraden

---

[1] Vgl. J. Picht, Optische Abbildung, Einführung in die Wellen- und Beugungstheorie optischer Systeme [§ 58]. — Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1931.

gegen die Abszisse ergibt sich dann (näherungsweise) der Abstand q der zu benutzenden „Einstellebene" von der paraxialen Bildebene, und zwar ist

$$q = -\,\mathrm{tg}\,\chi\,.$$



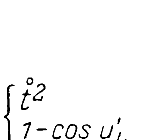


Abb. 37. Zur graphischen Bestimmung der für ein Strahlenbündel endlicher Öffnung günstigsten „Einstellebene", ihres Abstandes von der paraxialen Bildebene.

Der Abstand dieser Ebene vom letzten Flächenscheitel des abbildenden Systems ist dann $s^* = s'_k + q$. Die für diese Einstellebene geltenden $\triangle y'_k$-Werte für $y_1 \neq 0$ bezeichnen wir durch $\underset{*}{\triangle} y'_k$. Sie ergeben sich aus

$$\underset{*}{\triangle} y'_k = (\bar{s}'_k - s^*)\,\mathrm{tg}\,u'_k - \beta' y_1 + q\,\mathrm{tg}\,(u'_k)_{\mathring{t}=0}\,.$$

VI. Seidelsche Bildfehlertheorie

Wir haben in dem vorigen Abschnitt gesehen, wie man aus den kurvenmäßigen Darstellungen der $\triangle y'_k = \triangle y'_k(\mathring{\imath})$ für verschiedene y_0-Werte allgemeine, aber mehr qualitative Aussagen über die verschiedenen Bildfehler der Abbildung ablesen bzw. entnehmen kann.

Die Größe der Bildfehler, die ein optisches System für einen bestimmten Objektabstand besitzt, ist nun — außer von diesem Objektabstand selbst — noch abhängig von der Größe des Objektes, genauer: vom Achsenabstand y oder ϱ der einzelnen Objektpunkte, und außerdem von der „Öffnung" des abbildenden Strahlenbündels und demnach von der objektseitigen Neigung u_1 der einzelnen Strahlen gegen die Achse des Systems und ihre Neigung gegen die Meridianebene des abzubildenden Objektpunktes.

Diese objektseitige „Strahlrichtung" können wir auch näher kennzeichnen durch die Koordinaten $\mathring{x}$, $\mathring{y}$ des Punktes der Blendenebene (oder der Eintrittspupille), in dem der betreffende Strahl diese Ebene bzw. die EP durchsetzt.

Bei der theoretischen Behandlung der Abbildungsfehler werden nun diese den Strahl kennzeichnenden Größen sowie der Achsenabstand des Objektpunktes als klein angenommen, so daß man höhere Potenzen dieser Größen vernachlässigen kann. Berücksichtigt man sie nur bis einschließlich der Größen dritter Ordnung — man kann zeigen, daß bei rotationssymmetrischen Systemen jene Größen nur in der 1., 3., 5., . . . Ordnung auftreten —, so spricht man bei den sich hierdurch theoretisch ergebenden Bildfehlerausdrücken von den „Bildfehlern dritter Ordnung", mit denen wir uns hier näher beschäftigen wollen. Dabei bedeutet die Angabe: „bis zu Größen dritter Ordnung", daß in den bei der Fehlerberechnung *berücksichtigten* Bildfehlerausdrücken die Potenz der den Achsenabstand des Objektpunktes und der die objektseitige Strahlneigung angebenden Größen — soweit sie multiplikativ verbunden sind — *zusammengenommen* in jedem Einzelausdruck die Größenordnung der 3. Potenz nicht überschreitet.

1. Die SEIDELschen Bildfehlerausdrücke

Nach SEIDEL gilt nun unter Beschränkung auf Bildfehler dritter Ordnung, wie hier zunächst ohne Ableitung angegeben und erst in Abschnitt XII gezeigt werde[1],

[1] Siehe auch z. B.: J. Picht, Einführung in die Theorie der Elektronenoptik, § 28, S. 174 u. f. [Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1939], wo es sich um *beliebige*, also auch *anisotrope inhomogene* Medien handelt.

für die meridionale Abweichung:

$$y'_k - \overset{\times}{y}{}'_k = (\triangle y'_k)_{\mathrm{mer}}$$

$$\frac{(\triangle y'_k)_{\mathrm{mer}}}{s_1 \beta'} = \frac{1}{2}\,\frac{(\mathring{x}^2 + \mathring{y}^2)\,\mathring{y}\,s_1^3}{n_1\,(\mathring{z}_1 - s_1)^3} \cdot \sum_1^k I_\nu - \frac{1}{2}\,\frac{(\mathring{x}^2 + 3\mathring{y}^2)\,y_1\,s_1}{(\mathring{z} - s_1)^2} \sum_1^k II_\nu + \frac{1}{2}\,\frac{n_1\,\mathring{y}\,y_1^2}{s_1\,(\mathring{z}_1 - s_1)} \cdot \sum_1^k III_\nu - \frac{1}{2}\,\frac{n_1^2\,y_1^3}{s_1^3} \cdot \sum_1^k V_\nu . \qquad \text{(VI 1,1 m)}$$

Für die sagittale Abweichung:

$$x'_k - \overset{\times}{x}{}'_k = x'_k = (\triangle y'_k)_{\mathrm{sag}}$$

$$\frac{(\triangle y'_k)_{\mathrm{sag}}}{s_1 \beta'} = \frac{1}{2}\,\frac{(\mathring{x}^2 + \mathring{y}^2)\,\mathring{x}\,s_1^3}{n_1\,(\mathring{z}_1 - s_1)^3} \cdot \sum_1^k I_\nu - \frac{\mathring{x}\,\mathring{y}\,y_1\,s_1}{(\mathring{z} - s_1)^2} \sum II_\nu + \frac{1}{2}\,\frac{n_1\,\mathring{x}\,y_1^2}{s_1\,(\mathring{z}_1 - s_1)} \sum IV_\nu . \qquad \text{(VI 1,1 s)}$$

Hierin ist angenommen, daß die z-Achse mit der Symmetrieachse des Systems zusammenfalle, die x- und y-Achse dazu senkrecht liege und

$x_1 = 0$,

$y_1 =$ Achsenabstand des Objektpunktes eines (*mit der y-Achse zusammenfallenden*) achsensenkrechten Objektes ($x_1 = 0$),

$s_1 =$ Objektabstand von der ersten brechenden Fläche des abbildenden Systems,

$\frac{y_1}{s_1} =$ zugehöriger Bildfeldwinkel,

$\mathring{z}_1 =$ Blendenbildabstand,
(Abstand der EP von der ersten brechenden Fläche des abbildenden Systems.)

[Statt $\mathring{z}$ können wir daher — und werden wir in den späteren Abschnitten — auch $\mathring{s}$ schreiben.]

$\mathring{x}, \mathring{y} =$ Blendenbild-(EP-)Durchstoßungspunkt des Strahles,

$x'_k, y'_k =$ Schnittpunkt des Strahles mit der (paraxialen) Bildebene.

$I_\nu, II_\nu, \ldots, V_\nu$ sind die sogenannten „Flächenteilkoeffizienten", die von $x_1, y_1, \mathring{x}, \mathring{y}$ unabhängig sind und nur von den Größen der paraxialen Durchrechnung abhängen und deren funktionale Abhängigkeit von r, s, n, ... in VI 2 gegeben wird.

Führt man in der Blendenbildebene (EP-Ebene) Polarkoordinaten ein (Abb. 38), so folgt:

$$\mathring{y} = \mathring{\varrho} \cos \mathring{\psi} ,$$
$$\mathring{x} = \mathring{\varrho} \sin \mathring{\psi} .$$

$$\frac{(\triangle y_k')_{\text{mer}}}{s_1 \beta'} = \frac{1}{2} \frac{s_1^3 \mathring{\varrho}^3 \cos \mathring{\psi}}{n_1 (\mathring{z}_1 - s_1)^3} \cdot \sum_1^k I_\nu - \frac{1}{2} \frac{y_1 s_1 \mathring{\varrho}^2 (2 + \cos 2 \mathring{\psi})}{(\mathring{z} - s_1)^2} \sum_1^k II_\nu + \frac{1}{2} \frac{n_1 y_1^2 \mathring{\varrho} \cos \mathring{\psi}}{s_1 (\mathring{z}_1 - s_1)} \cdot \sum_1^k III_\nu - \frac{1}{2} \frac{n_1^2 y_1^3}{s_1^3} \cdot \sum_1^k V_\nu , \qquad \text{(VI 1,2m)}$$

$$\frac{(\triangle y_k')_{\text{sag}}}{s_1 \beta'} = \frac{1}{2} \frac{s_1^3 \mathring{\varrho}^3 \sin \mathring{\psi}}{n_1 (\mathring{z}_1 - s_1)^3} \cdot \sum_1^k I_\nu - \frac{1}{2} \frac{y_1 s_1 \mathring{\varrho}^2 \sin 2 \mathring{\psi}}{(\mathring{z} - s_1)^2} \cdot \sum_1^k II_\nu + \frac{1}{2} \frac{n_1 y_1^2 \mathring{\varrho} \sin \mathring{\psi}}{s_1 (\mathring{z}_1 - s_1)} \cdot \sum_1^k IV_\nu . \qquad \text{(VI 1,2s)}$$

Diskussion dieser Bildfehlerausdrücke

a) *Sphärische Aberration*

Nimmt man jetzt an, daß von den ΣI_ν, $\Sigma II_\nu, \ldots, \Sigma V_\nu$ *alle außer* ΣI_ν gleich Null sind, so folgt:

$$\frac{(\triangle y_k')_{\text{mer}}}{s_1 \beta'} = \frac{1}{2} \frac{s_1^3 \mathring{\varrho}^3 \cos \mathring{\psi}}{n_1 (\mathring{z}_1 - s_1)^3} \cdot \sum_1^k I_\nu ,$$

$$\frac{(\triangle y_k')_{\text{sag}}}{s_1 \beta'} = \frac{1}{2} \frac{s_1^3 \mathring{\varrho}^3 \sin \mathring{\psi}}{n_1 (\mathring{z}_1 - s_1)^3} \cdot \sum_1^k I_\nu ,$$

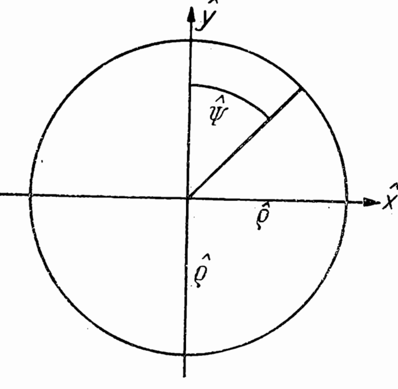


Abb. 38. Zur Koordinatenwahl in der Blendenebene. (Statt ^ lies °.)

also

$$\frac{\sqrt{(\triangle y_k')_m^2 + (\triangle y_k')_s^2}}{s_1 \beta'} = \frac{1}{2} \mathring{\varrho}^3 \frac{s_1^3}{n_1 (\mathring{z}_1 - s_1)^3} \sum_1^k I_\nu . \qquad \text{(VI 1,3)}$$

y_1 tritt in der obigen Beziehung nicht mehr auf, d. h., der durch $\sum_1^k I_\nu$ bedingte Fehler ist vom Achsenabstand des Objektpunktes unabhängig. Er ist allein abhängig von $\mathring{\varrho}$, der „Einfallshöhe" (in der EP- bzw. Blendenebene) der Strahlen, d. h. ihrem Öffnungswinkel. Man hat es bei diesem Fehler also mit dem „Öffnungsfehler", der „sphärischen Aberration" zu tun. Aus der obigen Beziehung folgt ferner, daß die Strahlen, die die Blendenebene (EP-Ebene) in den Punkten einer achsenzentrischen Kreislinie $\mathring{\varrho} = \text{const}$ durchsetzen, auch die betreffende Bildebene in einem Kreise durchsetzen. Da dessen Radius unabhängig von y_1 ist, macht sich dieser Bildfehler für alle Punkte des Objektes — unabhängig

von ihrem Achsenabstand y_1 — in *gleicher* Art bemerkbar. Wird der Kreis in der Blendenebene (charakterisiert durch den Öffnungswinkel) verdoppelt, so verachtfacht sich in der Bildebene der Bildkreisradius, da er proportional $\mathring{\varrho}^3$ ist.

b) *Komafehler*

Nun sei jede der $\sum_1^k I_\nu$, $\sum_1^k III_\nu$, $\sum_1^k IV_\nu$, $\sum_1^k V_\nu$ gleich Null, aber $\sum_1^k II_\nu \neq 0$.

Dann folgt:

$$\frac{(\triangle y_k')_m}{s_1\beta'} = -\frac{1}{2}\,\frac{y_1 s_1 \mathring{\varrho}^2(2+\cos 2\mathring{\psi})}{(\mathring{z}_1 - s_1)^2}\cdot\sum_1^k II_\nu\,,$$

$$\frac{(\triangle y_k')_s}{s_1\beta'} = -\frac{1}{2}\,\frac{y_1\cdot s_1 \mathring{\varrho}^2 \sin 2\mathring{\psi}}{(\mathring{z}_1 - s_1)^2}\cdot\sum_1^k II_\nu\,,$$

also

$$\left(\frac{(\triangle y_k')_m}{s_1\beta'} + \frac{2\mathring{\varrho}^2 y_1 s_1}{(\mathring{z}_1 - s_1)^2}\cdot\frac{1}{2}\sum_1^k II_\nu\right)^2 + \frac{(\triangle y_k')_s^2}{s_1^2\beta'^2} = \left(\frac{\mathring{\varrho}^2 y_1 s_1\cdot\frac{1}{2}\Sigma II_\nu}{(\mathring{z}_1 - s_1)^2}\right)^2. \qquad \text{(VI 1,4)}$$

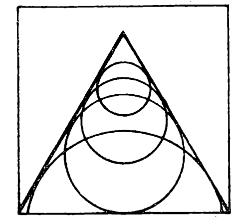


Abb. 39. Zur Entstehung des Komafehlers.

Der Fehler ist jetzt proportional y_1, d. h., er verschwindet für $y_1 = 0$. In der Bildebene bekommt man für $\mathring{\varrho} = \text{const}$ und $y_1 \neq 0$ wieder Kreise, deren Radien proportional sind dem Quadrat von $\mathring{\varrho}$ (und der ersten Potenz von y_1), deren Mittelpunkte aber mit zunehmendem $\mathring{\varrho}$ in meridionaler Richtung gegen den idealen Bildpunkt verschoben sind, und zwar um Beträge, die gleich sind dem doppelten Betrage des Radius des betreffenden Kreises[1]. Die Lichtfigur aller den verschiedenen $\mathring{\varrho}$ entsprechenden Strahlenkegel zeigt Abb. 39. Man bekommt also eine kometenförmige Lichtfigur, d. h., wir haben es hier mit dem Komafehler zu tun.

Aus dem Auftreten von $\cos 2\mathring{\psi}$ bzw. $\sin 2\mathring{\psi}$ in den Ausdrücken für $(\triangle y_k')_m$ und $(\triangle y_k')_s$ erkennt man weiter, daß die zu $\mathring{\varrho}$ gehörigen Bildkreise *zweimal* durchlaufen werden, wenn sich $\mathring{\psi}$ von 0 bis 2π ändert, der Kreis mit dem Radius $\mathring{\varrho}$ in der EP bzw. Blendenebene also nur *einmal* durchlaufen wird, so daß sich die Strahlen mit $\mathring{\psi} = 0$, $\mathring{\psi} = \pi$ im einen Schnittpunkt, diejenigen mit $\mathring{\psi} = \frac{\pi}{2}$; $\mathring{\psi} = \frac{3\pi}{2}$ im anderen Schnittpunkt des zugehörigen Bildkreises mit der Meridianebene treffen. Entsprechend treffen sich die Strahlen mit $\mathring{\psi} = \frac{\pi}{4}$, $\mathring{\psi} = \frac{5\pi}{4}$ im einen Schnittpunkt, $\mathring{\psi} = \frac{3\pi}{4}$, $\mathring{\psi} = \frac{7\pi}{4}$ im anderen Schnittpunkt des zugehörigen Bildkreises mit dem Sagittalschnitt.

Dies sind aber die oben (IV 2f) bereits kurz erwähnten kennzeichnenden Eigenschaften des sogenannten „Dreistrahlfehlers“.

[1] Die von der Spitze, dem „idealen“ Bildpunkt, ausgehenden geraden Begrenzungslinien bilden daher einen Winkel von 60° miteinander.

c) *Astigmatismus und Bildfeldkrümmung*

Die Summen $\sum_1^k I_\nu$, $\sum_1^k II_\nu$, $\sum_1^k V_\nu$ seien Null, dagegen sei

$$\sum_1^k III_\nu \neq 0 \quad \text{und} \quad \sum_1^k IV_\nu \neq 0.$$

Dann folgt:

$$\frac{(\Delta y_k')_m}{s_1\,\beta'} = \frac{1}{2}\,\frac{n_1\,y_1^2\,\mathring{\varrho}\cos\mathring{\psi}}{s_1\,(\mathring{z}_1 - s_1)}\cdot\sum_1^k III_\nu\,,$$

$$\frac{(\Delta y_k')_s}{s_1\,\beta'} = \frac{1}{2}\,\frac{n_1\,y_1^2\,\mathring{\varrho}\sin\mathring{\psi}}{s_1\,(\mathring{z}_1 - s_1)}\cdot\sum_1^k IV_\nu\,,$$

also

$$\left(\frac{(\Delta y_k')_m}{\Sigma\,III_\nu}\right)^2 + \left(\frac{(\Delta y_k')_s}{\Sigma\,IV_\nu}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\,\frac{n_1\,\mathring{\varrho}\,y_1^2\,\beta'}{(\mathring{z}_1 - s_1)}\right)^2. \qquad \text{(VI 1, 5)}$$

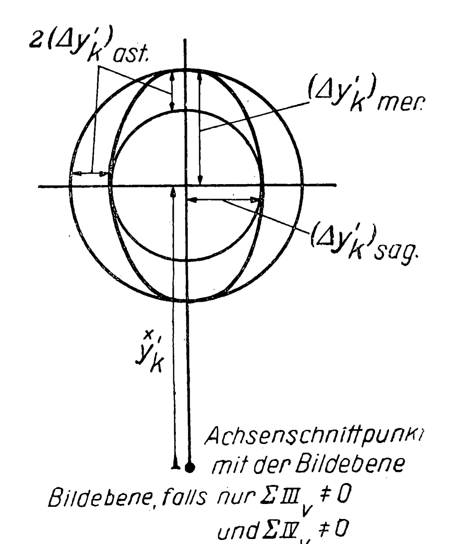


Abb. 40a. Zur Bestimmung der gegenseitigen Beziehungen zwischen $(\Delta y_k')_{\text{sag}}$, $(\Delta y_k')_{\text{mer}}$ und $(\Delta y_k')_{\text{ast}}$.

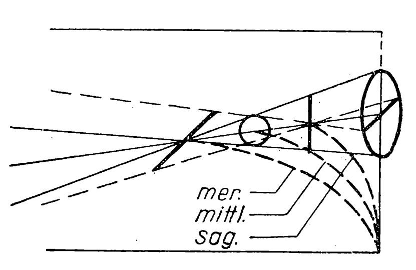


Abb. 40b. Astigmatisches Strahlenbündel und Bildfeldkrümmungen.

Als Schnittlinie der Strahlen eines vom (außeraxialen) Objektpunkt (y_1) ausgehenden Strahlenkegels mit der Bildebene bekommt man also jetzt Ellipsen, deren Achsen proportional $\mathring{\varrho}$ selbst sind. Dieser Bildfehler macht sich mit immer größer werdendem y_1 verstärkt bemerkbar, da die Ellipsenachsen mit y_1^2 wachsen. Er verschwindet für $y_1 = 0$. Der Fehler ist bedingt durch den Astigmatismus und die Bildfeldwölbung. Dabei ist $\Sigma\,III_\nu$ kennzeichnend für die meridionale Bildfeldkrümmung, $\Sigma\,IV_\nu$ für die sagittale Bildfeldkrümmung.

Statt der meridionalen und sagittalen Bildfeldkrümmung kann man auch die mittlere Bildfeldkrümmung und den Astigmatismus einführen, da diese Bildfehler durch jene (und umgekehrt) bestimmt sind, indem man definiert:

$$(\triangle y'_k)_{\text{mittl. Kr.}} = (\triangle y'_k)_{\text{sag}} + (\triangle y'_k)_{\text{ast}} = (\triangle y'_k)_{\text{mer}} - (\triangle y'_k)_{\text{ast}}. \qquad \text{(VI 1, 6)}$$

Durch Addition folgt

$$(\triangle y'_k)_{\text{mittl. Kr.}} = \frac{1}{2}\left[(\triangle y'_k)_{\text{sag}} + (\triangle y'_k)_{\text{mer}}\right]. \qquad \text{(VI 1, 7)}$$

Durch Subtraktion folgt

$$(\triangle y'_k)_{\text{ast}} = \frac{1}{2}\left[(\triangle y'_k)_{\text{mer}} - (\triangle y'_k)_{\text{sag}}\right]. \qquad \text{(VI 1, 8)}$$

Also ist für die Größe der mittleren Bildfeldkrümmung

$$\frac{1}{4}\frac{n_1 \mathring{\varrho}\, y_1^2 \beta'}{\mathring{z}_1 - s_1}\left[\sum_1^k III_\nu + \sum_1^k IV_\nu\right], \qquad \text{(VI 1, 9)}$$

für die Größe des Astigmatismus

$$\frac{1}{4}\frac{n_1 \mathring{\varrho}\, y_1^2 \beta'}{\mathring{z}_1 - s_1}\left[\sum_1^k III_\nu - \sum_1^k IV_\nu\right] \qquad \text{(VI 1, 10)}$$

maßgebend. Dabei sind die in $(\triangle y'_k)_{\text{mer}}$ und $(\triangle y'_k)_{\text{sag}}$ auftretenden Größen $\cos\mathring{\psi}$ bzw. $\sin\mathring{\psi}$ mit ihrem maximalen absoluten Betrag 1 eingesetzt, also die bezüglich $\mathring{\psi}$ maximalen Absolutbeträge von $(\triangle y'_k)_{\text{mer}}$ und $(\triangle y'_k)_{\text{sag}}$ benutzt.

d) *Verzeichnung*

Von den $\sum_1^k I_\nu$, $\sum_1^k II_\nu$, ... seien alle Null bis auf $\sum_1^k V_\nu$.

Dann wird

$$\frac{(\triangle y'_k)_{\text{mer}}}{s_1 \beta'} = -\frac{1}{2}\frac{n_1^2 y_1^3}{s_1^3} \cdot \sum_1^k V_\nu. \qquad \text{(VI 1, 11)}$$

Der Fehler ist unabhängig von $\mathring{\varrho}$, d. h. unabhängig vom Öffnungswinkel. Er ist abhängig vom Achsenabstand y_1 (mit der dritten Potenz). Der Fehler gibt uns (daher) die Verzeichnung an.

Die $\sum_1^k I_\nu$, ..., $\sum_1^k V_\nu$ bezeichnet man als „Summen der Flächenteilkoeffizienten".

2. Berechnung der Flächenteilkoeffizienten

Die $\sum_1^k I_\nu$, ..., $\sum_1^k V_\nu$ können durch die unten angegebenen Größen A_ν, B_ν, Γ_ν, P_ν, $\square_\nu$ dargestellt werden, die sich aus der paraxialen Durchrechnung eines optischen Systems ergeben.

Wir führen zunächst einige die Schreibweise vereinfachende und abkürzende Bezeichnungen ein:

$$n_\nu \left(\frac{1}{r_\nu} - \frac{1}{s_\nu}\right) = Q_\nu, \qquad \frac{1}{n'_\nu s'_\nu} - \frac{1}{n_\nu s_\nu} = \Delta\!\!\!|\,\left(\frac{1}{ns}\right)_\nu{}^1, \qquad \text{(VI 2,1)}$$

$$\frac{1}{n'_\nu} - \frac{1}{n_\nu} = \Delta\!\!\!|\,\left(\frac{1}{n}\right)_\nu.$$

Ferner

$$\frac{1}{\left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^2 \cdot Q_\nu} = \varepsilon_\nu, \quad \text{wobei} \quad \frac{t_\nu}{t_1} = \prod_2^\nu \frac{s_\mu}{s'_{\mu-1}}; \qquad \text{(VI 2,2)}$$

$$\sum_{\mu=2}^{\nu} \frac{d'_{\mu-1}}{n_\mu \cdot \frac{t_{\mu-1}}{t_1} \cdot \frac{t_\mu}{t_1}} = \mathfrak{d}_\nu; \qquad \text{(VI 2,3)}$$

$$\varepsilon_\nu + \mathfrak{d}_\nu = \tau_\nu. \qquad \text{(VI 2,4)}$$

Mit diesen Abkürzungen wird:

$$\mathsf{A}_\nu = \left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^4 Q_\nu^2 \cdot \Delta\!\!\!|\,\left(\frac{1}{ns}\right)_\nu = \frac{1}{\varepsilon_\nu^2} \cdot \Delta\!\!\!|\,\left(\frac{1}{ns}\right)_\nu, \qquad \text{(VI 2,5)}$$

$$\mathsf{B}_\nu = \tau_\nu \, \mathsf{A}_\nu, \qquad \text{(VI 2,6)}$$

$$\Gamma_\nu = \tau_\nu \, \mathsf{B}_\nu \qquad \text{(VI 2,7)}$$

$$\mathsf{P}_\nu = -\frac{1}{r_\nu} \cdot \Delta\!\!\!|\,\left(\frac{1}{n}\right)_\nu, \qquad \text{(VI 2,8)}$$

$$\square_\nu = \tau_\nu (\Gamma_\nu + \mathsf{P}_\nu). \qquad \text{(VI 2,9)}$$

Mit diesen so definierten Größen A_ν, B_ν, Γ_ν, P_ν, $\square_\nu$ — die man also zunächst aus den bei der paraxialen Durchrechnung auftretenden Größen berechnet und die demenstprechend außer von den „Daten" (r_ν, d'_ν, n'_ν) des optischen Systems (nur noch) vom gewählten *Objekt*abstand abhängen — ergeben sich dann, wenn man

$$\frac{1}{n_1} \frac{s_1 \hat{z}}{\hat{z} - s_1} = \frac{1}{\frac{n_1}{s_1} - \frac{n_1}{\hat{z}}} = \zeta$$

setzt, die $\Sigma I_\nu, \ldots, \Sigma V_\nu$ nach folgenden Beziehungen:

[1] Das „Differenzzeichen" $\Delta\!\!\!|$ (mit dem vertikalen Strich — gelesen: „Strich-Delta") weist darauf hin, daß von dem auf $\Delta\!\!\!|$ folgenden Ausdruck der Unterschied seines Wertes *nach der Brechung* von seinem Wert *vor der Brechung* zu nehmen ist; also z. B.:

$$\Delta\!\!\!|\,\left(\frac{1}{n}\right)_\nu = \frac{1}{n'_\nu} - \frac{1}{n_\nu}.$$

Sphärische Aberration:

$$\sum_1^k I_\nu = \sum_1^k \mathsf{A}_\nu\,, \qquad \text{(VI 2,10)}$$

Koma:

$$\sum II_\nu = \zeta \cdot \sum \mathsf{A}_\nu + \mathsf{B}_\nu\,, \qquad \text{(VI 2,11)}$$

meridionale Krümmung:

$$\sum III_\nu = 3\,\zeta^2 \cdot \sum \mathsf{A}_\nu + 6\,\zeta \cdot \sum \mathsf{B}_\nu + 3 \cdot \sum \Gamma_\nu + \mathsf{P}_\nu\,, \qquad \text{(VI 2,12)}$$

sagittale Bildfeldwölbung:

$$\sum IV_\nu = \zeta^2 \sum \mathsf{A}_\nu + 2\,\zeta \sum \mathsf{B}_\nu + \sum \Gamma_\nu + \sum \mathsf{P}_\nu\,, \qquad \text{(VI 2,13)}$$

für die im Ausdruck des Astigmatismus und der mittleren Bildfeldwölbung auftretende Differenz bzw. Summe von $\sum III_\nu$ und $\sum IV_\nu$ gilt somit

für $(\triangle y_k')_{\text{mittl. Kr.}}$:

$$\frac{1}{2}\left(\sum III_\nu + \sum IV_\nu\right) = 2\left[\zeta^2 \sum \mathsf{A}_\nu + 2\,\zeta \sum \mathsf{B}_\nu + \sum \Gamma_\nu\right] + \sum \mathsf{P}_\nu\,, \qquad \text{(VI 2,14)}$$

für $(\triangle y_k')_{\text{ast}}$:

$$\frac{1}{2}\left(\sum III_\nu - \sum IV_\nu\right) = \zeta^2 \sum \mathsf{A}_\nu + 2\,\zeta \sum \mathsf{B}_\nu + \sum \Gamma_\nu\,, \qquad \text{(VI 2,15)}$$

für $(\triangle y_k')_{\text{ast}} = 0$, d. h. bei behobenem Astigmatismus } werden die Σ-Ausdrücke in {
$(\triangle y_k')_{\text{mittl. Kr.}}$: $\sum \mathsf{P}_\nu$,
mer. Bildfeldkr.: $\sum \mathsf{P}_\nu$,
sag. Bildfeldkr.: $\sum \mathsf{P}_\nu$,

d. h.: *Bei behobenem Astigmatismus fallen die drei Bildfeldkrümmungen zusammen.*

Verzeichnung:

$$\sum V_\nu = \zeta^3 \sum \mathsf{A}_\nu + 3\,\zeta^2 \sum \mathsf{B}_\nu + \zeta\left(3 \sum \Gamma_\nu + \sum \mathsf{P}_\nu\right) + \sum \square_\nu\,. \qquad \text{(VI 2,16)}$$

Dabei war

$$\zeta = \frac{1}{n_1} \cdot \frac{s_1\,\mathring{z}_1}{\mathring{z}_1 - s_1} = \frac{1}{\dfrac{n_1}{s_1} - \dfrac{n_1}{\mathring{z}_1}} \left(= \frac{1}{\mathring{Q}_1 - Q_1} \right)$$

($\mathring{z}_1$ gibt die Blendenlage — genauer: den Abstand der EP von der ersten Fläche — an, kann also auch durch $\mathring{s}_1$ bezeichnet werden).

Für $s_1 \to \infty,\ n_1 = 1$ folgt $\lim\limits_{\substack{s_1 \to \infty \\ n_1 = 1}} (\zeta) = -\mathring{z}_1$.

Damit wird dann

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma I_\nu = \Sigma \mathsf{A}_\nu\,, \qquad \Sigma II_\nu = -\mathring{z}_1 \Sigma \mathsf{A}_\nu + \Sigma \mathsf{B}_\nu\,,\\
&\Sigma III_\nu = 3\,\mathring{z}_1^2 \Sigma \mathsf{A}_\nu - 6\,\mathring{z}_1 \Sigma \mathsf{B}_\nu + 3\,\Sigma \Gamma_\nu + \Sigma \mathsf{P}_\nu\,,\\
&\Sigma IV_\nu = \mathring{z}_1^2 \Sigma \mathsf{A}_\nu - 2\,\mathring{z}_1 \Sigma \mathsf{B}_\nu + \Sigma \Gamma_\nu + \Sigma \mathsf{P}_\nu\,,\\
&(\Sigma)_{(\triangle y_k')\mathrm{ast}} = \mathring{z}_1^2 \Sigma \mathsf{A}_\nu - 2\,\mathring{z}_1 \Sigma \mathsf{B}_\nu + \Sigma \Gamma_\nu\,,\\
&(\Sigma)_{(\triangle y_k')\,\mathrm{mittl.\,Kr.}} = 2\,[\mathring{z}_1^2 \Sigma \mathsf{A}_\nu - 2\,\mathring{z}_1 \Sigma \mathsf{B}_\nu + \Sigma \Gamma_\nu] + \Sigma \mathsf{P}_\nu\,,\\
&\Sigma V_\nu = -\mathring{z}_1^3 \Sigma \mathsf{A}_\nu + 3\,\mathring{z}_1^2 \Sigma \mathsf{B}_\nu - \mathring{z}_1 (3\,\Sigma \Gamma_\nu + \Sigma \mathsf{P}_\nu) + \Sigma \square_\nu\,.
\end{aligned}\right\}\quad \text{(VI 2,17)}$$

Entsprechend ihrem *ersten* Auftreten in den Formeln bezeichnet man:

A_ν als spezifische Flächenteilkoeffizienten der sphärischen Aberration,

B_ν als spezifische Flächenteilkoeffizienten der Asymmetriefehler (Rinnen- und Dreistrahlfehler, meridionale Koma),

Γ_ν als spezifische Flächenteilkoeffizienten des Astigmatismus,

P_ν als spezifische Flächenteilkoeffizienten der Bildfeldkrümmung,

$\square_\nu$ als spezifische Flächenteilkoeffizienten der Verzeichnung.

Es besagt also nicht (außer bei $\Sigma \mathsf{A}_\nu$), daß, wenn $\Sigma \mathsf{B}_\nu$ oder $\Sigma \Gamma_\nu$, $\Sigma \mathsf{P}_\nu$, $\Sigma \square_\nu = 0$, der betreffende Fehler dann in dritter Ordnung behoben ist. Vielmehr müssen *alle diese Flächenteilkoeffizientensummen möglich klein* gemacht werden. Und selbst wenn dies geschehen ist, wenn also alle diese Summen der Flächenteilkoeffizienten sogar Null gemacht werden könnten, so sind damit nur die Bildfehler *dritter* Ordnung behoben, im allgemeinen aber *nicht* die *höherer* Ordnung. Damit auch diese wenigstens in ihrer Summe klein sind, muß dafür gesorgt werden, daß die A_ν, B_ν, ..., $\square_\nu$ *für jedes* ν *einzeln klein* sind und *sich nicht nur* bei der Summation in den einzelnen Summen durch verschiedene Vorzeichen *gegenseitig kompensieren* (so daß dann $\Sigma \mathsf{A}_\nu = 0$ usw.).

Für den Fall, daß der Astigmatismus verschwindet, folgt nach (VI 1,10)

$$\frac{2\,(\mathring{z}_1 - s_1)}{\beta'\, n_1\, \mathring{\varrho}\, y_1^2} \cdot (\triangle y_k')_{\mathrm{ast}} = \frac{1}{2}\,(\Sigma III_\nu - \Sigma IV_\nu) = 0\,,$$

also

$$\Sigma III_\nu = \Sigma IV_\nu\,. \qquad \text{(VI 2,18)}$$

Ferner war — mit

$$2\,\frac{(\mathring{z}_1 - s_1)}{\beta'\, n_1\, \mathring{\varrho}\, y_1^2} = C \quad — :$$

$$C \cdot (\triangle y_k')_{\mathrm{mer.\,Kr.}} = \Sigma IV_\nu\,, \qquad C \cdot (\triangle y_k')_{\mathrm{sag.\,Kr.}} = \Sigma III_\nu\,, \qquad \text{(VI 2,19)}$$

$$C \cdot (\triangle y_k')_{\mathrm{mittl.\,Kr.}} = \frac{1}{2}(\Sigma III_\nu + \Sigma IV_\nu) = \Sigma III_\nu = \Sigma IV_\nu\,, \qquad \text{(VI 2,20)}$$

wo wieder bezüglich ψ die Maximalbeträge gemeint sind, also $\cos\psi$ bzw. $\sin\psi$ durch den Wert 1 ersetzt sind.

Die entsprechenden Flächenteilkoeffizienten eingesetzt, ergibt sich [vgl. (VI 2,14)]

$$\frac{1}{2}[\Sigma III_\nu + \Sigma IV_\nu] = 2(\zeta^2 \cdot \Sigma \mathsf{A}_\nu + 2\zeta \cdot \Sigma \mathsf{B}_\nu + \Sigma \Gamma_\nu) + \Sigma \mathsf{P}_\nu \cdot$$

Ferner ist jetzt bei behobenem Astigmatismus — [vgl. (VI 2,15) und (VI 2,18)]

$$C \cdot (\triangle y_k')_{\text{ast}} = \frac{1}{2}[2(\zeta^2 \cdot \Sigma \mathsf{A}_\nu + 2\zeta \cdot \Sigma \mathsf{B}_\nu + \Sigma \Gamma_\nu)] = 0\,, \qquad \text{(VI 2,21)}$$

also

$$C \cdot (\triangle y_k')_{\text{mittl. Kr.}} = \Sigma \mathsf{P}_\nu\,. \qquad \text{(VI 2,21a)}$$

Es sind also nach (VI 2,18), (VI 2,19) (VI 2,20), (VI 2,21) *bei behobenem Astigmatismus* die sagittale, meridionale und mittlere Bildfeldkrümmung einander gleich und verschwinden *dann*, ergeben also *dann* ein *geebnetes* Bild, *wenn* $\Sigma \mathsf{P}_\nu = 0$ ist[1].

$\Sigma \mathsf{P}_\nu$ bezeichnet man als PETZVALsumme — oder auch als „PETZVAL-Krümmung" —, da J. PETZVAL als erster die Bedeutung dieser $\Sigma \mathsf{P}_\nu$ erkannt hat.

Wie man aus den entsprechenden Werten sofort ersieht, ist die meridionale Bildfeldkrümmung

$$\Sigma III_\nu = \frac{3}{2}(\Sigma III_\nu - \Sigma IV_\nu) + \Sigma \mathsf{P}_\nu\,, \qquad \text{(VI 2,22)}$$

sagittale Bildfeldkrümmung

$$\Sigma IV_\nu = \frac{1}{2}(\Sigma III_\nu - \Sigma IV_\nu) + \Sigma \mathsf{P}_\nu\,. \qquad \text{(VI 2,23)}$$

Es sind somit die in Abb. 41 dargestellten Krümmungsverhältnisse möglich. Um eine geringe mittlere Bildfeldkrümmung zu erhalten, muß man es daher anstreben, daß bei *positiver* PETZVALsumme ein *negativer* Astigmatismus, bei *negativer* PETZVALsumme ein *positiver* Astigmatismus auftritt, wie dies in den Fällen 3 bzw. 2 in Abb. 41 dargestellt ist.

---

[1] Es sei erwähnt, daß man — im Anschluß an eine grundlegende Arbeit von SCHWARZSCHILD [Abhandlungen zur geometrischen Optik I, II, III. Astron. Mittlgen der kgl. Sternwarte zu Göttingen 9, 10 u. 11, 1905] — auch öfter folgende Bezeichnungen benutzt:

$$D = \Sigma IV_\nu\,, \quad \frac{1}{2}(\Sigma III_\nu + \Sigma IV_\nu) = C + D\,,$$

$$2C + D = \Sigma III_\nu\,, \quad \Sigma \mathsf{P}_\nu = D - C\,, \quad \frac{1}{2}(\Sigma III_\nu - \Sigma IV_\nu) = C\,.$$

Ist also $\Sigma III_\nu - \Sigma IV_\nu = 0$, d. h. der Astigmatismus behoben, so gibt $\Sigma \mathsf{P}_\nu$ unmittelbar die Bildfeldkrümmung, d. h. die Scheitelkrümmung der Bildschale.

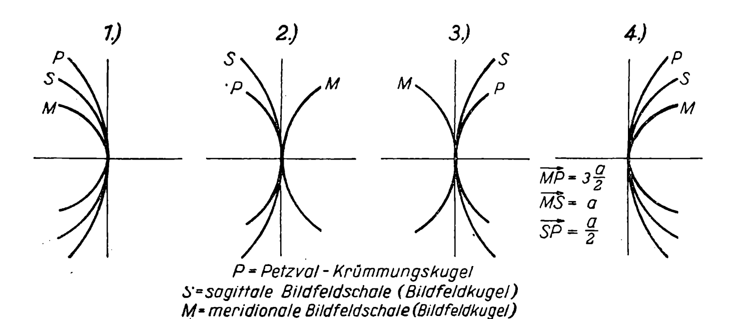


Abb. 41. Verschiedene Möglichkeiten der gegenseitigen Lagebeziehungen der meridionalen, der sagittalen und der PETZVAL-Bildfeldschale.

3. Die Blendenlage

Die Stellung der Blende ist bei der Korrektur eines optischen Systems wesentlich. Die $(\triangle y_k')_{\mathrm{mer}}$ und $(\triangle y_k')_{\mathrm{sag}}$ sind außer von der Lage des Objektpunktes und der Öffnung (d. h. den Koordinaten des Strahlschnittpunktes mit der Blendenebene) auch von der Blendenlage, der Lage $\mathring{z}_1$ der EP, abhängig.[1]

Aber auch in den Ausdrücken der $\Sigma I_\nu, \ldots, \Sigma V_\nu$, in denen die Summen der spezifischen Flächenteilkoeffizienten $\mathsf{A}_\nu, \ldots, \square_\nu$ auftreten, tritt die Blendenlage $\mathring{z}_1$ in $\zeta = \dfrac{1}{\dfrac{n_1}{s_1} - \dfrac{n_1}{\mathring{z}_1}}$ auf.

Ist es nun möglich, die Bildfehler durch eine bestimmte Blendenwahl zu beeinflussen oder sie durch eine geeignete Blendenwahl zum Verschwinden zu bringen? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die Gleichungen (VI 2,10) u. f.

Wir ersehen unmittelbar:

$$\Sigma I_\nu = \Sigma \mathsf{A}_\nu$$

ist durch $\mathring{z}_1$ nicht zu beeinflussen, denn ζ tritt in ΣI_ν nicht auf.

Aus
$$\Sigma II_\nu = \zeta \cdot \Sigma \mathsf{A}_\nu + \Sigma \mathsf{B}_\nu = 0$$

folgt
$$\left(\frac{1}{\mathring{z}_1}\right)_{\Sigma II_\nu = 0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\Sigma \mathsf{A}_\nu}{\Sigma \mathsf{B}_\nu}. \qquad \text{(VI 3,1)}$$

[1] Wenn im folgenden von der „Blendenlage $\mathring{z}_1$“ gesprochen wird, so ist damit stets — wie bisher — die Lage der EP, des objektseitigen Bildes der (materiellen) Blende, gemeint, aus der sich ja eine geeignete „Blendenlage“ leicht bestimmt.

Es gibt also immer eine reelle Blendenstellung $\mathring{z}_1$, die die obige Bedingung $\Sigma II_\nu = 0$ erfüllt.

Aus $\Sigma III_\nu = 3\,\zeta^2 \cdot \Sigma \mathsf{A}_\nu + 6\,\zeta \cdot \Sigma \mathsf{B}_\nu + 3\,\Sigma \mathsf{\Gamma}_\nu + \Sigma \mathsf{P}_\nu = 0$

folgt für die Blendenstellung, die $\Sigma III_\nu = 0$ ergibt:

$$\left(\frac{1}{\mathring{z}_1}\right)_{\Sigma III_\nu = 0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\Sigma \mathsf{A}_\nu}{\Sigma \mathsf{B}_\nu \pm \sqrt{(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 - \Sigma \mathsf{A}_\nu \left(\Sigma \mathsf{\Gamma}_\nu + \frac{1}{3}\,\Sigma \mathsf{P}_\nu\right)}}. \qquad \text{(VI 3,2)}$$

Die Zahl der reellen Lösungen hängt von der Größe des Radikanden ab:

$R > 0$ gibt 2 reelle Lösungen für $\mathring{z}_1$,

$R = 0$ gibt 1 reelle Lösung für $\mathring{z}_1$,

$R < 0$ gibt keine reelle Lösung für $\mathring{z}_1$.

Die Bedingung $\Sigma III_\nu = 0$ kann also eventuell durch zwei (verschiedene) bzw. eine Blendenstellung erreicht werden, sofern $R \geqq 0$ ist.

$$\Sigma IV_\nu = \frac{1}{3}\,(\Sigma III_\nu - \Sigma \mathsf{P}_\nu) + \Sigma \mathsf{P}_\nu = \frac{1}{3}\,\Sigma III_\nu + \frac{2}{3}\,\Sigma \mathsf{P}_\nu = 0$$

ist erfüllt für

$$\left(\frac{1}{\mathring{z}_1}\right)_{\Sigma IV_\nu = 0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\Sigma \mathsf{A}_\nu}{\Sigma \mathsf{B}_\nu \pm \sqrt{(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 - \Sigma \mathsf{A}_\nu\,(\Sigma \mathsf{\Gamma}_\nu + \Sigma \mathsf{P}_\nu)}}. \qquad \text{(VI 3,3)}$$

Es ist also — wie bei ΣIII_ν — die Bedingung $\Sigma IV_\nu = 0$ durch zwei, eine bzw. gar keine geeignete Blendenstellung erreichbar.

$$C \cdot (\triangle y_k')_{\text{mittl. Bild-Kr.}} = \frac{1}{2}\,(\Sigma III_\nu + \Sigma IV_\nu) = 2\,\Sigma IV_\nu - \Sigma \mathsf{P}_\nu$$
$$= \frac{2}{3}\,\Sigma III_\nu + \frac{1}{3}\,\Sigma \mathsf{P}_\nu = 0$$

ist erfüllt für

$$\left(\frac{1}{\mathring{z}_1}\right)_{\text{mittl. Kr.} = 0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\Sigma \mathsf{A}_\nu}{\Sigma \mathsf{B}_\nu \pm \sqrt{(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 - \Sigma \mathsf{A}_\nu \left(\Sigma \mathsf{\Gamma}_\nu + \frac{1}{2}\,\Sigma \mathsf{P}_\nu\right)}}. \qquad \text{(VI 3,4)}$$

Es gibt also auch wieder entweder zwei, eine oder gar keine Blendenstellung, für die $(\triangle y_k')_{\text{mittl. Kr.}} = 0$ erreicht wird.

$$C \cdot (\triangle y_k')_{\text{ast}} = \frac{1}{2}(\Sigma III_\nu - \Sigma IV_\nu) = \Sigma IV_\nu - \Sigma \mathsf{P}_\nu = \frac{1}{3}\Sigma III_\nu - \frac{1}{3}\Sigma \mathsf{P}_\nu = 0$$

ist erfüllt für

$$\left(\frac{1}{\mathring{z}_1}\right)_{\text{ast}=0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\Sigma \mathsf{A}_\nu}{\Sigma \mathsf{B}_\nu \pm \sqrt{(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 - \Sigma \mathsf{A}_\nu \Sigma \Gamma_\nu}}. \qquad \text{(VI 3,5)}$$

Es gibt also auch hier entweder zwei, eine oder gar keine Blendenstellung, für die $(\triangle y_k')_{\text{ast}} = 0$ erreicht wird.

Es ist noch zu beachten:

a) Die Blendenlagen, die den einen oder den anderen Fehler zum Verschwinden bringen, sind auch noch von dem Objektabstand s_1 abhängig, wobei s_1 nicht nur explizite, sondern außerdem in den $\mathsf{A}_\nu, \ldots, \square_\nu$ enthalten ist.

b) Für $\Sigma \mathsf{A}_\nu = 0$ ist der eine $\mathring{z}_1$-Wert in allen Fällen (außer für $\Sigma V_\nu = 0$) $\mathring{z}_1 = s_1$, d. h., die Objektlage ist zugleich Blendenlage. Praktisch ist dies natürlich ohne Bedeutung, da ja das vom Objekt ausgehende Strahlenbündel entweder durch die Linsenberandung oder eine reelle Blende begrenzt ist.

c) Bei der Verhinderung der besonders störenden Asymmetriefehler ΣII_ν ist die geeignete Blendenstellung außer von s_1 noch von $\Sigma \mathsf{A}_\nu$ und $\Sigma \mathsf{B}_\nu$ abhängig. *Dieses* $\mathring{z}_1$ nach (VI 3,1) bezeichnet man als *natürliche* Blende. Die Bedingungsgleichung (VI 3,1) für dieses $\mathring{z}_1$ heißt auch Fraunhofer*sche Bedingung*.

d) Ist $\Sigma \mathsf{A}_\nu = 0$, so muß, damit das System frei vom Asymmetriefehler ist, wegen $\Sigma II_\nu = \zeta \cdot \Sigma \mathsf{A}_\nu + \Sigma \mathsf{B}_\nu$ auch $\Sigma \mathsf{B}_\nu = 0$ sein. Dann ist, weil sowohl $\Sigma \mathsf{A}_\nu = 0$ als auch $\Sigma \mathsf{B}_\nu = 0$ ist, $\Sigma II_\nu = 0$ unabhängig von der Blendenstellung $\mathring{z}_1$. Man sagt dann, das optische System ist bezüglich der Asymmetriefehler *stabil* korrigiert.

Für solche Systeme gilt *ferner*:
da nach (VI 2,12) und (VI 2,13)

$$\Sigma III_\nu = 3\,\zeta^2 \cdot \Sigma \mathsf{A}_\nu + 6\,\zeta \cdot \Sigma \mathsf{B}_\nu + 3\,\Sigma \Gamma_\nu + \Sigma \mathsf{P}_\nu$$

und

$$\Sigma IV_\nu = \zeta^2 \cdot \Sigma \mathsf{A}_\nu + 2\,\zeta \cdot \Sigma \mathsf{B}_\nu + \Sigma \Gamma_\nu + \Sigma \mathsf{P}_\nu$$

sind, d. h. die Größen $\Sigma \Gamma_\nu$ und $\Sigma \mathsf{P}_\nu$ nicht ζ^m als Faktor besitzen, sind ΣIII_ν und ΣIV_ν, der Astigmatismus und die mittlere Bildfeldwölbung nicht mehr von der Blendenlage $\mathring{z}$ abhängig (wohl aber die Verzeichnung!), wenn für das betreffende System $\Sigma \mathsf{A}_\nu = 0$ und $\Sigma \mathsf{B}_\nu = 0$ ist.

Damit durch Wahl der asymmetriefehlerfreien Blenden <u>neben $\Sigma II_\nu = 0$</u>

a) noch die mittlere Bildfeldkrümmung verschwindet, muß nach (VI 3,4) sein

$$(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 = \Sigma \mathsf{A}_\nu \left(\Sigma \Gamma_\nu + \frac{1}{2}\Sigma \mathsf{P}_\nu\right),$$

b) noch die meridionale Bildfeldkrümmung verschwindet, muß nach (VI 3,2) gelten

$$(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 = \Sigma \mathsf{A}_\nu \left(\Sigma \Gamma_\nu + \frac{1}{3}\Sigma \mathsf{P}_\nu\right),$$

c) noch die sagittale Bildfeldkrümmung verschwindet, muß nach (VI 3,3) gelten

$$(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 = \Sigma \mathsf{A}_\nu (\Sigma \Gamma_\nu + \Sigma \mathsf{P}_\nu)\,,$$

d) noch der Astigmatismus verschwindet, muß nach (VI 3,5) sein

$$(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 = \Sigma \mathsf{A}_\nu \Sigma \Gamma_\nu\,,$$

f) noch die Verzeichnung behoben ist, muß sein

$$2\frac{(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^3}{(\Sigma \mathsf{A}_\nu)^2} - \frac{\Sigma \mathsf{B}_\nu}{\Sigma \mathsf{A}_\nu}(3\,\Sigma \Gamma_\nu + \Sigma \mathsf{P}_\nu) + \Sigma \square_\nu = 0\,.$$

Sonderfall.

Fällt das Objekt ins Unendliche, so ist:

$\underline{s_1 \to \infty\,.}$ Ist ferner $\underline{n_1 = 1\,,}$

so ergeben sich für die Blendenstellung bzw. für die Lage der EP, für die der jeweils angegebene Bildfehler verschwindet, die folgenden $\mathring{z}_1$-Werte:

$$(\mathring{z}_1)_{\substack{\Sigma II_\nu = 0 \\ (s_1 \to \infty)}} = \frac{\Sigma \mathsf{B}_\nu}{\Sigma \mathsf{A}_\nu}\,, \tag{VI 3,1a}$$

$$(\mathring{z}_1)_{\substack{\Sigma III_\nu = 0 \\ (s_1 \to \infty)}} = \frac{1}{\Sigma \mathsf{A}_\nu}\left[\Sigma \mathsf{B}_\nu \pm \sqrt{(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 - \Sigma \mathsf{A}_\nu\left(\Sigma \Gamma_\nu + \frac{1}{3}\Sigma \mathsf{P}_\nu\right)}\right]\cdot \tag{VI 3,2a}$$

$$(\mathring{z}_1)_{\substack{\Sigma IV_\nu = 0 \\ (s_1 \to \infty)}} = \frac{1}{\Sigma \mathsf{A}_\nu}\left[\Sigma \mathsf{B}_\nu \pm \sqrt{(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 - \Sigma \mathsf{A}_\nu(\Sigma \Gamma_\nu + \mathsf{P}_\nu)}\right], \tag{VI 3,3a}$$

$$(\mathring{z}_1)_{\substack{\Sigma III_\nu + \Sigma IV_\nu = 0 \\ (s_1 \to \infty)}} = \frac{1}{\Sigma \mathsf{A}_\nu}\left[\Sigma \mathsf{B}_\nu \pm \sqrt{(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 - \Sigma \mathsf{A}_\nu\left(\Sigma \Gamma_\nu + \frac{1}{2}\Sigma \mathsf{P}_\nu\right)}\right], \tag{VI 3,4a}$$

$$(\mathring{z}_1)_{\substack{\Sigma III_\nu - \Sigma IV_\nu = 0 \\ (s_1 \to \infty)}} = \frac{1}{\Sigma \mathsf{A}_\nu}\left[\Sigma \mathsf{B}_\nu \pm \sqrt{(\Sigma \mathsf{B}_\nu)^2 - \Sigma \mathsf{A}_\nu \cdot \Sigma \Gamma_\nu}\right]. \tag{VI 3,5a}$$

Hierin besagt — um es noch einmal zu wiederholen — die Aussage

$\Sigma II_\nu = 0$ die Aufhebung des Komafehlers (Asymmetriefehlers),

$\Sigma III_\nu = 0$ die Aufhebung der meridionalen Bildfeldkrümmung,

$\Sigma IV_\nu = 0$ die Aufhebung der sagittalen Bildfeldkrümmung,

$\Sigma III_\nu + \Sigma IV_\nu = 0$ die Aufhebung der mittleren Bildfeldkrümmung,

$\Sigma III_\nu - \Sigma IV_\nu = 0$ die Aufhebung des Astigmatismus.

VII. Isoplanasie- und Sinusbedingung

1. Isoplanasiebedingung

In vielen Fällen ist es unerläßlich, den Asymmetriefehler zu beseitigen. Wir wollen uns daher mit diesem noch etwas näher beschäftigen und die Bedingung aufstellen, die sich aus der trigonometrischen Durchrechnung der Strahlen ergibt und erfüllt sein muß, damit der Asymmetriefehler behoben ist, damit also auch das zu außeraxialen Objektpunkten gehörige abbildende Strahlenbündel bildseitig zum Hauptstrahl des Bündels symmetrisch verläuft und — darüber hinaus — die gleiche Kaustik ($\equiv$ Brennfläche) besitzt wie das zu dem Achsenpunkt des Objektes gehörige bildseitige Strahlenbündel.

Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst zwei von dem Achsenpunkt des Objektes ausgehende, gegen die Achse geneigte Strahlen (Abb. 42), deren

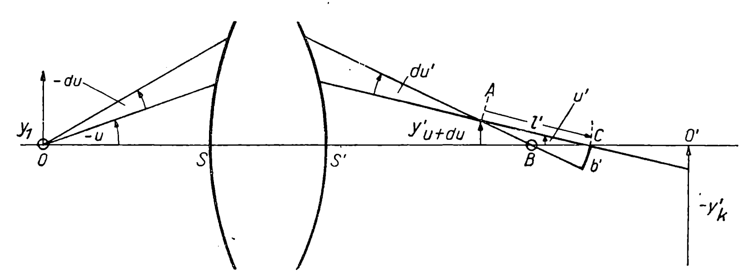


Abb. 42. Zur Ableitung der Isoplanasiebedingung.

Neigungswinkel (u und $u + du$) sich nur wenig voneinander unterscheiden. Für die zugehörigen bildseitigen Strahlen sei

$$\overrightarrow{S'B} = \bar{s}'_{u+du}, \qquad \overrightarrow{S'C} = \bar{s}'_u, \qquad \overrightarrow{S'O'} = s', \qquad \overrightarrow{AC} = l'.$$

Schlägt man um den Punkt A einen Kreis mit dem Radius l', so folgt aus der Figur, da der von $\overrightarrow{CB}$ und b' gebildete Winkel gleich $\frac{\pi}{2} - u'$ ist und b' senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$ liegt,

$$\sin u' = \frac{b'}{-\bar{s}'_{u+du} + \bar{s}'_u}, \qquad du' = \frac{b'}{l'}.$$

Mit

$$\bar{s}'_{u+du} - \bar{s}'_u = d\bar{s}'_u \qquad \text{wird} \qquad \sin u' = \frac{-l'\,du'}{d\bar{s}'_u}. \tag{VII 1,1}$$

Für einen außeraxialen Punkt des Objektes (Abb. 43) sei ME der (bildseitige) Hauptstrahl (durch die Blendenmitte, d. h. hier: Mitte der AP), DE ein bildseitiger abbildender Strahl, der objektseitig gegen den Hauptstrahl unter dem Winkel u geneigt sei und den vom Achsenpunkt des Objektes unter dem Winkel u gegen die Achse verlaufenden Strahl bildseitig in D trifft. Seine bildseitige Neigung gegen den bildseitigen Hauptstrahl ME sei v'.

Ferner sei $\overrightarrow{S'M} = \mathring{z}'$, $\overrightarrow{DC} = m'$, $\overrightarrow{AC} = l'$.

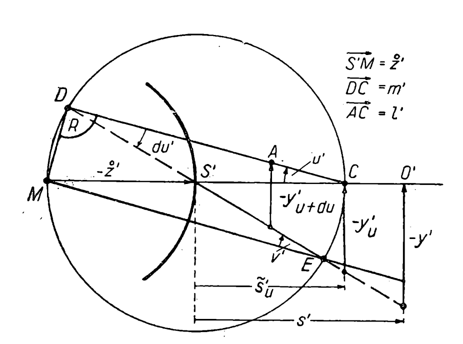


Abb. 43. Zur Ableitung der Isoplanasiebedingung.

Die Forderung der Symmetrie verlangt nun, daß $u' = v'$, d. h., daß die vier verstärkt eingezeichneten Punkte auf einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt auf der optischen Achse, also in der Mitte zwischen M und C, liegen muß, da die Abbildungsverhältnisse zur Achse symmetrisch sind, also für einen zu dem außeraxialen Punkt — mit Bezug auf die Achse — symmetrisch gelegenen Punkt entsprechend gelten. Der Winkel $\sphericalangle\, MDC$ muß also 90° sein.

Mit dieser Forderung folgt aus der Figur:

$$\frac{y'}{y'_u} = \frac{s' - \mathring{z}'}{\bar{s}'_u - \mathring{z}'}, \qquad \frac{y'_{u+du}}{y'_u} = \frac{m' - l'}{m'},$$

$$\cos u' = \frac{m'}{\bar{s}'_u - \mathring{z}'}. \tag{VII 1,2}$$

Ferner ist

$$\frac{y'}{y'_u} \cdot \frac{y'_u}{y'_{u+du}} \cdot \frac{1}{\cos u'} = \frac{s' - \mathring{z}'}{\bar{s}'_u - \mathring{z}'} \cdot \frac{m'}{m' - l'} \cdot \frac{\bar{s}'_u - \mathring{z}'}{m'},$$

also

$$\frac{y'}{y'_u} \cdot \frac{y'_u}{y'_{u+du}} \cdot \frac{1}{\cos u'} = \frac{s' - \mathring{z}'}{m' - l'},$$

$$y'_{u+du} = \frac{y'}{\cos u'} \cdot \frac{m' - l'}{s' - \mathring{z}'}.$$

Die HELMHOLTZsche Gleichung lautet (mit $dy = y$)

$$n_1\, y_1 \cos u_1\, du_1 = n'\, y'_{u+du} \cos u'\, du' = n'\, y' \cdot \frac{m' - l'}{s' - \mathring{z}'} \cdot du'.$$

Mit $\dfrac{y'}{y_1} = \beta'_s$, $m' = (\tilde{s}'_u - \mathring{z}') \cos u'$ [nach (VII 1,2)] und $l' = -\dfrac{\sin u'}{du'} \cdot d\tilde{s}'_u$ [nach (VII 1,1)] geht dies über in

$$\frac{1}{y_1} \cdot n_1 y_1 \cos u_1 \, du_1 = n' \cdot \frac{y'}{y_1} \cdot \left[\frac{\tilde{s}'_u - \mathring{z}'}{s' - \mathring{z}'} \cos u' \, du' + \frac{\sin u'}{s' - \mathring{z}'} \, d\tilde{s}'_u\right]$$

$$= \frac{n' \beta'_s}{s' - \mathring{z}'} \cdot [(\tilde{s}'_u - \mathring{z}') \cos u' \, du' + \sin u' \, d\tilde{s}'_u],$$

$$n_1 \, d(\sin u_1) = \frac{n' \beta'_s}{s' - \mathring{z}'} \cdot [(\tilde{s}'_u - \mathring{z}') \, d(\sin u') + \sin u' \, d\tilde{s}'_u].$$

Da

$$d[(\tilde{s}'_u - \mathring{z}') \sin u'] = (\tilde{s}'_u - \mathring{z}') \, d(\sin u') + \sin u' \, d\tilde{s}'_u$$

ist, folgt durch Integration:

$$n \sin u = \frac{n' \beta'_s}{s' - \mathring{z}'} [(\tilde{s}'_u - \mathring{z}') \sin u'].$$

Durch Addition und Subtraktion von $s' \cdot \sin u'$ in der $[\cdots]$ der vorstehenden Gleichung folgt, wenn

$$\tilde{s}'_u - s' = \triangle s'$$

gesetzt wird:

$$\frac{n'}{n} \beta'_s \triangle s' \sin u' = (s' - \mathring{z}') \left[\sin u - \frac{n'}{n} \beta'_s \sin u'\right],$$

$$\triangle s' = (s' - \mathring{z}') \left[\frac{n \sin u}{n' \beta'_s \sin u'} - 1\right], \qquad \text{(VII 1,3)}$$

$$1 = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} \cdot \frac{1}{\beta'_s} - \frac{\triangle s'}{s' - \mathring{z}'},$$

$$\boxed{1 + \frac{\triangle s'}{s' - \mathring{z}'} = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} \cdot \frac{1}{\beta'_s}}. \qquad \text{(VII 1,4)}$$

Dies ist die Isoplanasiebedingung; in *logarithmischer* Form lautet sie:

$$\boxed{\log\left(\frac{n_1 \sin u_1}{n'_k \sin u'_k} \cdot \frac{1}{\beta'_s}\right) - \log\left(1 + \frac{\triangle s'}{s'_k - \mathring{z}'_k}\right) = 0}. \qquad \text{(VII 1,5)}$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, ist also der Asymmetriefehler — in den Grenzen der Abbildungsfehler dritter Ordnung — behoben.

Ist

$$\left.\begin{matrix} \mathring{z}'_k < 0 \\ s'_k > 0 \end{matrix}\right\}, \quad \text{so ist} \quad \left(1 + \frac{\triangle s'}{s'_k - \mathring{z}'_k}\right) \lessgtr \left(1 + \frac{\triangle s'}{s'_k}\right) \quad \text{für} \quad \triangle s' \left\{\begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}\right.,$$

d. h.

$$\log\left(\frac{1}{\beta_s'}\frac{n_1\sin u_1}{n_k'\sin u_k'}\right)-\log\left(1+\frac{\triangle s'}{s_k'-\mathring{z}_k'}\right)\gtrless\log\left(\frac{1}{\beta_s'}\frac{n_1\sin u_1}{n_k'\sin u_k'}\right)-\log\left(1+\frac{\triangle s'}{s_k'}\right).$$

Es ist noch:

$$1+\frac{\triangle s'}{s_k'-\mathring{z}_k'}=1+\frac{\triangle s'}{s_k'}\frac{1}{1-\frac{\mathring{z}_k'}{s_k'}}\approx 1+\frac{\triangle s'}{s_k'}+\frac{\mathring{z}_k'\cdot\triangle s'}{s_k'^2},$$

$$\ln\left(1+\frac{\triangle s'}{s_k'-\mathring{z}_k'}\right)\approx\ln\left(1+\frac{\triangle s'}{s_k'}\right)+\frac{\mathring{z}_k'\cdot\triangle s'}{s_k'(1+\triangle s')}.$$

Ferner:

$$\log x = 0{,}4343\ \ln x\ .$$

Ist nun also $\mathring{z}_k'\gtrless 0$, $s_k'>0$, so ist zur Behebung des Asymmetriefehlers erforderlich, daß

$$\log\left(\frac{1}{\beta_s'}\cdot\frac{n_1\sin u_1}{n_k'\sin u_k'}\right)-\log\left(1+\frac{\triangle s'}{s_k'}\right)\approx\frac{\mathring{z}_k'\cdot\triangle s'\cdot 0{,}4343}{s_k'(1+\triangle s')}\quad\begin{matrix}<0 \text{ für } \begin{Bmatrix}\mathring{z}_k'<0\\ \triangle s'>0\end{Bmatrix},\\ <0 \text{ für } \begin{Bmatrix}\mathring{z}_k'>0\\ \triangle s'<0\end{Bmatrix},\end{matrix}$$

$$\log\left(\frac{1}{\beta_s'}\cdot\frac{n_1\sin u_1}{n_k'\sin u_k'}\right)-\log\left(1+\frac{\triangle s'}{s_k'}\right)\quad\begin{matrix}>0 \text{ für } \begin{Bmatrix}\mathring{z}_k'<0\\ \triangle s'<0\end{Bmatrix},\\ >0 \text{ für } \begin{Bmatrix}\mathring{z}_k'>0\\ \triangle s'>0\end{Bmatrix}.\end{matrix}$$

Für $(s_1 =)\ s\to\infty$ ist $s\cdot\sin u\to t_1\ (=t_1)=t$
und $s\cdot\beta_s'\to f'$,

so daß (VII 1,4) übergeht in

$$\boxed{1+\frac{\triangle s'}{s_k'-\mathring{z}_k'}=\frac{n_1 t_1}{n_k' f'\sin u_k'}}\qquad\text{(VII 1,4}_\infty)$$

und (VII 1,5) in

$$\boxed{\log\frac{n_1 t_1}{n_k' f'\sin u_k'}-\log\left(1+\frac{\triangle s'}{s_k'-\mathring{z}_k'}\right)=0}\ .\qquad\text{(VII 1,5}_\infty)$$

Aus (VII 1,3) und (VII 1,4) folgt *für* $\triangle s'=0$, also für den Fall, daß die *sphärische Aberration behoben* ist:

$$\boxed{\beta_s'=\frac{n_1\cdot\sin u_1}{n_k'\cdot\sin u_k'}}\qquad\text{(VII 1,6)}$$

bzw. für $(s_1 =)\ s \to \infty$

$$\boxed{f' = \frac{n_1 t_1}{n_k' \sin u_k'}} \,. \qquad \text{(VII 1,6}_\infty\text{)}$$

Dies ist die sogenannte „ABBEsche Sinusbedingung", während man die Isoplanasiebedingung nach F. STAEBLE und E. LIHOTZKI benennt, die sie — voneinander unabhängig — fast gleichzeitig fanden.

2. Die Sinusbedingung

Wir haben die Sinusbedingung (VII 1, 6) als Spezialfall der Isoplanasiebedingung im vorigen Abschnitt kennengelernt. Sie ergab sich aus der Isoplanasiebedingung, indem wir $\triangle s' \equiv 0$ setzten, d. h., wir mußten hier — bei der Sinusbedingung — voraussetzen, daß die Systeme frei von sphärischer Aberration sind. Aus (VII 1, 3) erhielten wir so die Sinusbedingung:

$$\boxed{\beta_s' = \frac{n_1 \sin u_1}{n_k' \sin u_k'}} \,, \qquad \text{(VII 2,1)}$$

wobei uns k die Anzahl der brechenden Flächen des Systems angibt.

Derartige optische Systeme, die frei von sphärischer Aberration sind und gleichzeitig die Sinusbedingung erfüllen, demnach auch keinen Asymmetriefehler bei der Abbildung außeraxialer Objektpunkte besitzen, d. h. gleichzeitig frei sind vom Komafehler, bezeichnet man als „*aplanatisch*", während man sie als „*isoplanatisch*" bezeichnet, wenn sie zwar sphärische Aberration besitzen, aber der Isoplanasiebedingung genügen, bei denen also die Bilder der außeraxialen Objektpunkte die gleiche sphärische Aberration aufweisen wie der Achsenpunkt, aber keinen zusätzlichen Komafehler besitzen.

Natürlich ist auch die Eigenschaft, „aplanatisch" oder „isoplanatisch" zu sein, *keine* reine „*Systemeigenschaft*", sondern bezieht sich wieder nur darauf, daß das System für einen *bestimmten Objektabstand* diese Eigenschaft besitzt.

Die in der Praxis Verwendung findenden optischen Systeme sind aber im allgemeinen *nicht* völlig frei von sphärischer Aberration. Daher hat die Sinusbedingung nur geringere Bedeutung. Daß sie trotzdem so häufig verwendet wird, ist aus der einfacheren Handhabung im Gegensatz zu der komplizierteren Isoplanasiebedingung zu erklären. Bei den berechneten Systemen kann also die Sinusbedingung nie streng erfüllt werden. Da aber bei gut korrigierten Systemen die sphärische Aberration sehr gering ist, hat auch die Sinusbedingung in erster Näherung Gültigkeit.

Die Sinusbedingung und die Forderung nach ihrer Erfüllung wurde erstmalig von ERNST ABBE in die geometrische Optik eingeführt. Sie wird daher vielfach nach ihm als ABBEsche Sinusbedingung benannt. Ihrer prinzipiellen Bedeutung wegen — auf die wir in VII 3 noch näher eingehen werden — seien nachstehend noch einige Ableitungen der Sinusbedingung durchgeführt.

a) *Ableitung mit Hilfe der Helmholtz-Lagrangeschen Formel*

Zur unmittelbaren Ableitung der Sinusbedingung betrachten wir ein Sagittalstrahlenbüschel[1], das von einem auf der optischen Achse gelegenen Punkt O unter einer Neigung u gegen die Achse ausgehe. Nach der Helmholtz-Lagrangeschen Gleichung (I 5, 3*) gilt dann, wenn y ein kleines achsensenkrechtes Objekt (Linienelement) in der Ebene des Sagittalstrahlenbüschels und y' das zugehörige Bild ist, die Formel:

$$n y \vartheta = n' y' \vartheta' .$$

Angewandt auf die Abbildung durch *eine* Fläche, ergibt sich daraus

$$\frac{\vartheta}{\vartheta'} = \frac{n' y'}{n y} = \frac{n'}{n} \beta'_u = \frac{\bar{s}'}{\bar{s}} . \qquad \text{(VII 2, 2)}$$

Legen wir nun senkrecht zur Meridianebene und senkrecht zur Symmetrieachse des Systems einen Schnitt durch unser Strahlenbüschel, und verbinden

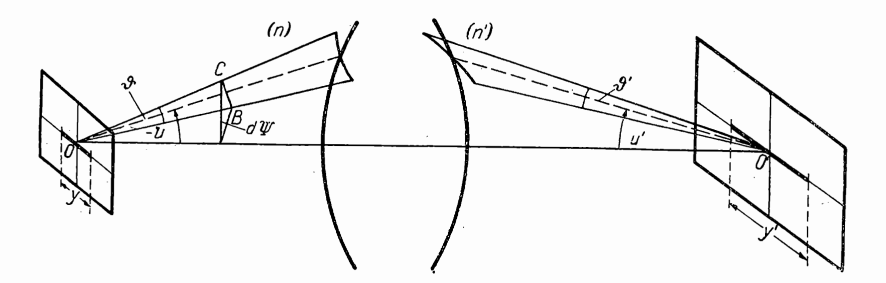


Abb. 44. Zur Ableitung der Sinusbedingung mit Hilfe der Helmholtz-Lagrangeschen Formel für Sagittalstrahlen.

wir die Endpunkte B und C der Schnittlinie BC mit dem senkrecht darunter gelegenen Punkt A auf der optischen Achse, so erhalten wir das Dreieck ABC (Abb. 44). Wenn wir den Winkel bei A durch $d\psi$ bezeichnen, der ja, da ϑ eine kleine Größe ist, ebenfalls sehr klein ist, so daß wir den Sinus des Winkels durch den Winkel selbst ausdrücken können, so läßt sich sofort aus dem Dreieck folgende Beziehung ablesen:

$$d\psi = \frac{BC}{AB} .$$

Aus dem Dreieck OBC erhalten wir für ϑ

$$\vartheta = \frac{BC}{OB} = d\psi \cdot \frac{AB}{OB} .$$

[1] Während man bei einem *räumlichen* Strahlenkegel in der Optik von einem Strahlen*bündel* spricht, bezeichnet man in der Optik eine in einer *Ebene* liegende, allgemeiner: eine *flächenhafte* (kontinuierliche) Strahlenmannigfalt als „Strahlen*büschel*".

Für $\frac{AB}{OB}$ ergibt sich aber aus dem Dreieck OAB gerade der Wert $\sin u$, so daß wir schließlich finden:

$$\vartheta = d\psi \cdot \sin u\,.$$

Entsprechende Überlegungen lassen sich im Bildraum durchführen. Dort würden wir dann erhalten, da ja $d\psi' = d\psi$ ist,

$$\vartheta' = d\psi \cdot \sin u'\,.$$

Bilden wir jetzt wieder wie oben das Verhältnis dieser beiden Winkel, so wird mit (VII 2,2)

$$\frac{\vartheta}{\vartheta'} = \frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n}\,\beta'_u$$

oder

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta'_u = \frac{\bar{s}'_u \cdot n}{\bar{s}_u \cdot n'}\,.$$

Lassen wir dieses Sagittalstrahlenbüschel — und mit ihm das in seiner Ebene liegende y bzw. y' — um die optische Achse rotieren, so erhalten wir einen Sagittalstrahlenkegel der Neigung u gegen die Achse, der uns also ein kleines achsensenkrechtes Flächenelement vom Durchmesser y mit einer Vergrößerung β'_u abbildet. Sollen nun die verschiedenen Sagittalstrahlenkegel *verschiedener* „Öffnung“ u gleiche Bildgrößen liefern, so muß β'_u *von* u *unabhängig*, also gleich der paraxialen Vergrößerung β'_s sein. Wir erhalten jetzt

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta'_s = \frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s}\,.$$

Nehmen wir nun noch an, daß unser optisches System aus k brechenden Flächen besteht, so erhalten wir die Sinusbedingung in der bekannten Form

$$\frac{n_1 \sin u_1}{n'_k \sin u'_k} = \beta'_s = \frac{n_1}{n'_k} \prod_{j=1}^{k} \frac{s'_j}{s_j}\,. \qquad \text{(VII 2,3)}$$

b) *Ableitung mit Hilfe der Wärmetheorie nach* CLAUSIUS

Nach dem LAMBERTschen Gesetz ist die Strahlung eines Flächenelementes dq in einer Richtung, die mit der Flächennormalen $\mathfrak{n}$ einen Winkel u bildet (Abb. 45), gleich dem Produkt aus der „Leuchtdichte“ des Flächenelementes, der Größe des Flächenelementes und dem Cosinus des Neigungswinkels u, also gleich $dq \cos u$, wenn wir die nur als Proportionalitätsfaktor auftretende Leuchtdichte $= 1$ setzen. Auch von Absorption der Strahlung im durchstrahlten Medium sei ausdrücklich abgesehen.

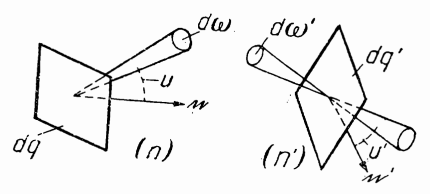


Abb. 45. Zur Ableitung der Sinusbedingung nach CLAUSIUS mit Hilfe der Wärmetheorie.

Untersuchen wir nun die Energie, die von einem Flächenelement dq im

Objektraum mit dem Brechungsindex n innerhalb eines Raumwinkels $d\omega$ nach einem Flächenelement dq' im Bildraum (Brechungsindex n') innerhalb des Raumwinkels $d\omega'$ übertragen wird, so ergibt sich

$$n^2 \cos u \, d\omega \, dq = n'^2 \cos u' \, d\omega' \, dq' ,$$

wobei uns die linke Seite dieser Gleichung die unter der Neigung u der Achse des Strahlenkegels gegen die Flächennormale $\mathfrak{n}$ abgestrahlte Energie und die rechte Seite die aufgenommene Energie angibt.

Wir wollen diese Überlegungen jetzt auf zwei zur optischen Achse senkrechte Flächenelemente dq und dq' anwenden.

Aus der nebenstehenden Zeichnung (Abb. 46) läßt sich mit

$$\frac{a}{c} = du , \quad \frac{b}{d} = d\psi , \quad \frac{d}{c} = \sin u$$

für $d\omega$ folgende einfache Beziehung ableiten:

$$d\omega = \frac{a \cdot b}{c^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{d}{c} = \sin u \, du \cdot d\psi .$$

Abb. 46. Zur Ableitung der Beziehung $d\omega = \sin u \, du \, d\psi$

Entsprechend erhält man, da $d\psi' = d\psi$ ist,

$$d\omega' = \sin u' \, du' \, d\psi .$$

Setzen wir diese Werte in unsere obige Energiebeziehung ein, so wird:

$$n^2 \cdot \sin u \cos u \, du \, dq = n'^2 \cdot \sin u' \cos u' \, du' \, dq'$$

oder

$$n^2 \cdot d\,(\sin^2 u)\, dq = n'^2 \, d\,(\sin^2 u')\, dq' .$$

Integriert man diese Gleichung, so ergibt sich

$$n^2 \sin^2 u \, dq = n'^2 \sin^2 u' \, dq', \qquad \text{also} \qquad \frac{n^2 \sin^2 u}{n'^2 \sin^2 u'} = \frac{dq'}{dq} = \beta_u'^2 .$$

Soll nun die Bildgröße — wie erforderlich — von u unabhängig sein, die vom Flächenelement dq nach den verschiedenen Richtungen ausgestrahlte Energie also durch das optische System so umgelenkt werden, daß sie sich für *alle* Richtungen auf ein *gleich großes* Flächenelement dq' ($=$ const $\cdot\, dq$) verteilt, so muß $\beta_u'^2$ von u unabhängig sein.

Nun ist aber $\left(\frac{dq'}{dq}\right)_{u \to 0} = \beta_0'^2$, und wir erhalten mit dieser Beziehung

$$\frac{dq'}{dq} = \beta_0'^2 = \frac{n^2 \sin^2 u}{n'^2 \sin^2 u'}$$

und daraus durch Radizieren unsere Sinusbedingung

$$\beta_0' = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta_u' = \beta_s' .$$

Bei der Ableitung der Sinusbedingung in den beiden vorstehenden Fällen wurde immer vorausgesetzt — und mußte vorausgesetzt werden —, daß sich die verschiedenen Sagittalstrahlenkegel der Neigung u gegen die optische Achse

bildseitig alle im gleichen Punkt, dem Bild des auf der Achse liegenden Objektpunktes, schneiden. Es wurde also angenommen, daß die Abbildung frei von sphärischer Aberration ist, wie wir das schon früher — bei der Spezialisierung der Isoplanasiebedingung zur Sinusbedingung — erwähnt haben.

3. Auflösungsvermögen und Sinusbedingung

Aus wellen- und beugungsoptischen Überlegungen ist bekannt, daß auch bei idealer Abbildung — also dann, wenn eine von einem Objektpunkt ausgehende Kugelwelle durch das optische System zu einer konvergierenden idealen *Kugelwelle* umgeformt wird — das entstehende Bild des Objektpunktes nicht punktförmig ist, sondern ein Lichtscheibchen darstellt, dessen Intensität (Helligkeit) von ihrem Maximalbetrag in der Mitte zum Rande hin auf Null abnimmt und dessen Durchmesser $2\,\varrho'_o$ von der Wellenlänge λ' des benutzten (als monochromatisch vorausgesetzten) Lichtes im Bildraum und der bildseitigen Öffnung $(u'_k)_{\max} = u'$ des zur Abbildung benutzten Teiles der Kugelwelle — geometrisch-optisch gesprochen: des abbildenden Strahlenbüschels — abhängt, und zwar ist

$$2\,\varrho'_o = 1{,}22\,\frac{\lambda'}{\sin u'}\,. \qquad \text{(VII 3,1)}$$

Damit zwei benachbarte Objektpunkte im Bilde noch getrennt wahrnehmbar sind, müssen sie voneinander einen solchen Abstand y haben, daß der gegenseitige Abstand y' ihrer *Bild*punkte größer — mindestens gleich — ist dem Radius ϱ'_o der Bildscheibchen, daß also

$$\underline{\underline{y' \geqq \varrho'_o}} \qquad \text{(VII 3,2)}$$

ist.

Nun ist $\lambda' n' = \lambda n$; $\sin u' \approx \operatorname{tg} u' = \frac{\varnothing_{H'}}{2\,a'}$; $\operatorname{tg} u = \frac{\varnothing_H}{2\,a}$, wenn $\varnothing_{H'}$ bzw. $\varnothing_H$ den Durchmesser des bildseitigen bzw. objektseitigen Strahlenbündels in der Ebene des bildseitigen bzw. objektseitigen Hauptpunktes bezeichnet und a' wie bisher der Abstand des Bildes vom bildseitigen Hauptpunkt des Systems, a der Abstand des Objektes vom objektseitigen Hauptpunkt des Systems ist. Nun ist $\varnothing_{H'} = \varnothing_H$. Es ist demnach

$$\operatorname{tg} u' = \frac{a}{a'}\operatorname{tg} u \approx \sin u', \text{ also } \varrho'_o = 0{,}61\,\frac{n\,\lambda}{n' \sin u'} = 0{,}61\,\frac{n\,\lambda}{n' \operatorname{tg} u}\cdot\frac{a'}{a}.$$

Andererseits ist, wenn ω, ω' die „Bildfeldwinkel" sind, unter denen die zu einem dem axialen Objektpunkt lateral benachbarten Objektpunkt [bzw. zu dem diesem „benachbarten Objektpunkt" konjugierten Bildpunkt] gehörigen Hauptpunktstrahlen gegen die Achse geneigt sind,

$$n \sin\omega = n' \sin\omega'; \ \sin\omega' \approx \operatorname{tg}\omega' = \frac{y'}{a'}; \ \operatorname{tg}\omega = \frac{y}{a} \approx \sin\omega\,.$$

Dann muß — wenn y der Achsenabstand des außeraxialen Objektpunktes und y' der Achsenabstand des außeraxialen Bildpunktes ist —

$$y = \frac{a \operatorname{tg} \omega}{a' \operatorname{tg} \omega'} y' \approx \frac{n' a}{n a'} y' \geqq \frac{n' a}{n a'} \varrho'_0 = \frac{n' a}{n a'} \cdot 0{,}61 \frac{n \lambda}{n' \operatorname{tg} u} \cdot \frac{a'}{a}$$

also

$$y \geqq 0{,}61 \frac{n \lambda}{n \operatorname{tg} u} \approx 0{,}61 \frac{n \lambda}{n \sin u} = 0{,}61 \frac{n \lambda}{A} = 0{,}61 \frac{n' \lambda'}{A} \qquad \text{(VII 3,3)}$$

sein, damit die Bilder der beiden lateral benachbarten Objektpunkte getrennt wahrnehmbar sind. $\boxed{A = n \sin u}$ ist die „numerische Apertur" des abbildenden Systems.

Bei der Ableitung sind vier Näherungen benutzt, von denen mindestens die erste bei mikroskopischer Abbildung im allgemeinen nicht zulässig ist, nämlich

1) $\operatorname{tg} u \approx \sin u$,
2) $\operatorname{tg} u' \approx \sin u'$,
3) $\operatorname{tg} \omega \approx \sin \omega$,
4) $\operatorname{tg} \omega' \approx \sin \omega'$.

Von diesen Näherungen wird die zweite, dritte und vierte im allgemeinen noch erlaubt sein, da der Winkel ω, unter dem die beiden um den kleinen Betrag y voneinander entfernten Objektpunkte vom objektseitigen Hauptpunkt aus erscheinen, tatsächlich in allen (oder doch fast allen) Fällen sehr klein ist und das gleiche für die bildseitigen Öffnungswinkel u' sowie für ω' gilt.

Ohne diese Näherungen ergibt sich, daß zur Trennung der Bilder beider Objektpunkte erforderlich ist, daß

$$y = y' \frac{n' a}{n a'} \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sin \omega} \frac{\sin \omega'}{\operatorname{tg} \omega'} \geqq \varrho'_0 \frac{n' a}{n a'} \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sin \omega} \frac{\sin \omega'}{\operatorname{tg} \omega'} = 0{,}61 \frac{n \lambda}{A} \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sin \omega} \frac{\sin \omega'}{\operatorname{tg} \omega'} \frac{\sin u}{\operatorname{tg} u} \frac{\operatorname{tg} u'}{\sin u'}. \qquad \text{(VII 3,4)}$$

Nehmen wir die Näherungen 2), 3) und 4) als erfüllt an, so gilt also statt (VII 3,3) genauer, daß $y \geqq 0{,}61 \frac{n \lambda}{A} \cdot \varkappa$ sein muß mit $\varkappa = \frac{\sin u}{\operatorname{tg} u} < 1$, so daß hiernach das zu erwartende Auflösungsvermögen (AV) besser sein wird als das „theoretische AV", wobei wir AV definieren durch $\mathrm{AV} = \frac{1}{y_{\min}}$, so daß

$$\mathrm{AV} = 1{,}64 \frac{A}{n \lambda} \cdot \frac{1}{\varkappa} = 1{,}64 \frac{A}{n \lambda} \delta \qquad \text{mit} \qquad \delta = \frac{\operatorname{tg} u}{\sin u} > 1 \qquad \text{(VII 3,5)}$$

und AV = Anzahl der (gleichabständig angenommenen) „Punkte" pro mm, die noch getrennt werden, wobei λ in mm ausgedrückt einzusetzen ist.

Nun ist

für $u =$ 10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\delta = \frac{\operatorname{tg} u}{\sin u} \approx$ 1,015	1,057	1,155	1,303	1,560	2,000	2,930	5,76	∞,

so daß hiernach das AV mit wachsender Apertur stärker als proportional der Apertur zunimmt. Andererseits nimmt zum Rande des Gesichtsfeldes hin das Auflösungsvermögen AV des Objektivs — auch bei idealer Strahlenvereinigung — ab, da dort auch die Näherung 3) nicht mehr gestattet ist und $\frac{\sin \triangle\omega}{\operatorname{tg} \triangle\omega}$ mit wachsendem ω immer kleiner wird $(\triangle\omega = \omega_2 - \omega_1)$.

Berücksichtigen wir jetzt aber die *Sinusbedingung* (VII 2,1) und nehmen sie als *erfüllt* an, so folgt wegen

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta_0' = \underline{\text{const}}\,,$$

daß

$$\varrho_0' = 0{,}61 \frac{n\lambda}{n' \sin u'} = 0{,}61\, \beta_0' \frac{n\lambda}{n \sin u} = 0{,}61 \frac{y'}{y} \frac{n\lambda}{A}\,,$$

und da $y' \geqq \varrho_0' = 0{,}61 \frac{y'}{y} \frac{n\lambda}{A}$ sein soll, so erhalten wir jetzt *ohne Vernachlässigung*

$$y \geqq 0{,}61 \frac{n\lambda}{A}\,, \qquad \text{also} \qquad \boxed{\text{AV} = 1{,}64 \frac{A}{n\lambda}}\,, \qquad \text{(VII 3, 6)}$$

über das ganze Gesichtsfeld.

4. Sinusbedingung und Asymmetriefehler (Komafehler)

Wir wollen jetzt einen unter der Neigung u auf eine sphärische Linsenfläche mit dem Radius r treffenden Lichtstrahl betrachten (vgl. Abb. 47). Wir bezeichnen wieder wie früher durch $\tilde{s}$ seine Schnittweite. $\tilde{\tilde{s}}$ sei die Länge des Lichtstrahls von der Fläche bis zum Schnitt mit der Achse, t das Lot vom Schnittpunkt des Strahls mit der brechenden Fläche auf die Achse und $\check{t}$ die zugehörige Scheiteltiefe.

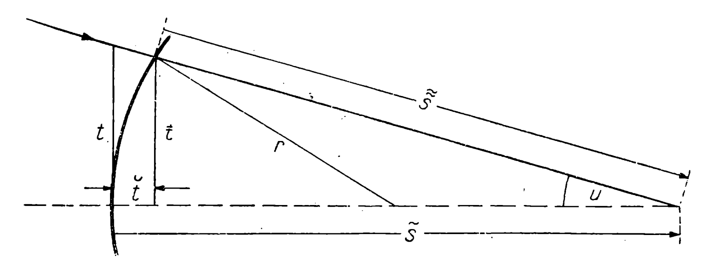


Abb. 47. Zur Ableitung der Beziehung zwischen $\tilde{\tilde{s}}$, $\tilde{s}$, r und t.

Aus der Zeichnung läßt sich dann leicht folgende Beziehung ablesen:

$$t^2 = \tilde{\tilde{s}}^2 - (\tilde{s} - \check{t})^2 = r^2 - (r - \check{t})^2.$$

Mit Hilfe der beiden rechten Ausdrücke erhält man für $\tilde{\tilde{s}}^2$

$$\tilde{\tilde{s}}^2 = r^2 - r^2 + 2\, r\check{t} - \check{t}^2 + \tilde{s}^2 - 2\, \tilde{s}\check{t} + \check{t}^2 = \tilde{s}^2 + 2\,(r - \tilde{s})\, \check{t}.$$

Daraus ergibt sich für $\tilde{\tilde{s}}$ selbst

$$\tilde{\tilde{s}} = \tilde{s}\sqrt{1+\frac{2\,(r-\tilde{s})}{\tilde{s}^2}\,\check{t}}\,.$$

Berücksichtigen wir nun, daß $\check{t}$ bei kleinen Strahlneigungen u selbst auch eine sehr kleine Größe ist, so daß wir höhere Potenzen von $\check{t}$ gegenüber r und $\tilde{s}$ vernachlässigen können, so erhalten wir, wenn wir den hier auftretenden Wurzelausdruck in Reihe entwickeln, in genügender Genauigkeit

$$\tilde{\tilde{s}} = \tilde{s} + \frac{r-\tilde{s}}{\tilde{s}}\,\check{t}\,. \qquad \text{(VII 4,1)}$$

Wollen wir noch die hier auftretende Scheiteltiefe $\check{t}$ durch die anderen Größen ausdrücken, so entnehmen wir der Zeichnung

$$\check{t} = r - \sqrt{r^2 - t^2}$$

oder, wenn wir die Wurzel wieder in eine Reihe entwickeln,

$$\check{t} = r - r\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{r}\,.$$

Dies in unsere Gleichung (VII 4,1) für $\tilde{\tilde{s}}$ eingesetzt, ergibt

$$\tilde{\tilde{s}} = \tilde{s} + \frac{1}{2}\,\frac{r-\tilde{s}}{r\,\tilde{s}}\,t^2 = \tilde{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tilde{s}} - \frac{1}{r}\right)t^2\,,$$

wo wir für achsennahe Strahlen in der benutzten Näherung — und bei behobener sphärischer Aberration allgemein — $\tilde{s}$ durch s ersetzen können.

Nehmen wir hiervon den reziproken Wert, so erhalten wir, wenn wir für die rechte Seite wieder eine Reihenentwicklung vornehmen,

$$\frac{1}{\tilde{\tilde{s}}} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right)\frac{t^2}{s^2}\,.$$

Führen wir hier als Abkürzung die bei der Behandlung der SEIDELschen Bildfehlertheorie eingeführte invariante Größe (VI 2,1)

$$Q = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)$$

ein, so nimmt unsere Gleichung die Form an

$$\frac{1}{\tilde{\tilde{s}}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{n s^2}\,Q = \frac{1}{s}\left(1 + \frac{t^2}{2 n s}\,Q\right). \qquad \text{(VII 4,2)}$$

Eine entsprechende Beziehung können wir für den gebrochenen Lichtstrahl ableiten:

$$\tilde{\tilde{s}}' = s' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r}\right)t^2 = s' - \frac{t^2}{2\,n'}\,Q = s'\left(1 - \frac{t^2}{2\,n'\,s'}\,Q\right). \qquad \text{(VII 4,3)}$$

Wir bilden jetzt das Verhältnis der beiden Schnittweiten vor und nach der Brechung

$$\frac{\tilde{\tilde{s}}'}{\tilde{\tilde{s}}} = \frac{s'}{s}\left(1 - \frac{t^2}{2n's'}Q\right)\left(1 + \frac{t^2}{2ns}Q\right) = \frac{s'}{s}\left[1 - \frac{t^2}{2}Q\left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right)\right].$$

Führen wir noch nach (VI 2,1) die Abkürzung $\left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right) = \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)$ ein, so geht obiger Ausdruck über in

$$\frac{\tilde{\tilde{s}}'}{\tilde{\tilde{s}}} = \frac{s'}{s}\left[1 - \frac{t^2}{2}Q \cdot \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)\right]. \qquad \text{(VII 4,4)}$$

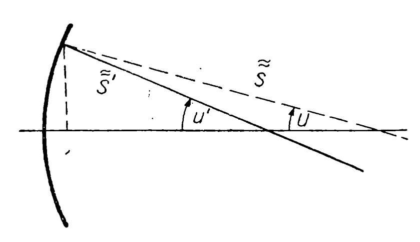


Abb. 48. Zur Ableitung der Beziehung zwischen $\tilde{\tilde{s}}$, $\tilde{\tilde{s}}'$, u und u'.

Betrachten wir nebenstehende Zeichnung (Abb. 48), so sehen wir, daß andererseits gilt

$$\frac{\tilde{\tilde{s}}'}{\tilde{\tilde{s}}} = \frac{\sin u}{\sin u'}. \qquad \text{(VII 4,5)}$$

Wir wollen nun ein optisches System untersuchen, das aus mehreren Flächen besteht. Für dieses erhalten wir dann aus den obigen Überlegungen [vgl. (VII 4,4) und (VII 4,5)], da t_j eine kleine Größe ist:

$$\frac{\sin u_1}{\sin u_k'} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\sin u_j}{\sin u_j'} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\tilde{\tilde{s}}_j'}{\tilde{\tilde{s}}_j} = \prod_{j=1}^{k} \frac{s_j'}{s_j} \cdot \prod_{j=1}^{k}\left[1 - \frac{t_j^2}{2}Q_j \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_j\right]$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{s_j'}{s_j}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} t_j^2 Q_j \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_j\right)$$

$$= \frac{n_k'}{n_1}\beta'\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} t_j^2 Q_j \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_j\right). \qquad \text{(VII 4,6)}$$

Abb. 49. Darstellung von u_1 und u_k'.

Damit nun die Sinusbedingung (VII 2,1) erfüllt ist, muß das 2. Glied in der Klammer verschwinden, d. h., es muß gelten:

$$\sum_{j=1}^{k} t^2 Q_j \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_j = 0. \qquad \text{(VII 4,7)}$$

Nun haben wir bei der Behandlung der SEIDELschen Bildfehlertheorie angegeben, daß [siehe (VI 2,5), (VI 2,6), (VI 2,4), (VI 2,2)]

$$\mathsf{A}_\nu = \left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^4 Q_\nu^2 \cdot \bigtriangleup \left(\frac{1}{n s}\right)_\nu ,$$

$$\mathsf{B}_\nu = \tau_\nu \, \mathsf{A}_\nu$$

ist, wo

$$\tau_\nu = \varepsilon_\nu + \mathfrak{d}_\nu = \frac{1}{\left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^2 Q_\nu} + \mathfrak{d}_\nu$$

war, so daß nach (VI 2,11)

$$\sum II_\nu = \zeta \sum \mathsf{A}_\nu + \sum \left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^2 Q_\nu \bigtriangleup \frac{1}{n s} + \sum \mathfrak{d}_\nu \, \mathsf{A}_\nu ,$$

worin noch $\zeta \Sigma \mathsf{A}_\nu = 0$ ist, wenn — wie bei Erfüllung der Sinusbedingung vorausgesetzt wurde — das System von sphärischer Aberration frei ist.

Die hier auftretende Größe $\mathfrak{d}_\nu$ nimmt für ein System aus unendlich dünnen Linsen den Wert Null an, und wir erhalten dann, wenn neben $\Sigma \mathsf{A}_\nu = 0$ auch $\Sigma \mathfrak{d}_\nu \, \mathsf{A}_\nu = 0$ oder doch vernachlässigbar klein ist,

$$\sum II_\nu = \sum \mathsf{B}_\nu = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^2 Q_\nu \bigtriangleup \left(\frac{1}{n s}\right)_\nu .$$

Dabei war B_ν der spezifische Flächenteilkoeffizient der ν-ten Fläche für den Asymmetriefehler (Komafehler usw.). Der Komafehler eines von sphärischer Aberration freien Systems aus unendlich dünnen Linsen verschwindet also, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{k} \mathsf{B}_\nu = \frac{1}{t_1^2} \sum_{j=1}^{k} t_j^2 Q_j \bigtriangleup \left(\frac{1}{n s}\right)_j = 0$$

oder auch, wenn

$$\sum_{j=1}^{k} t_j^2 Q_j \bigtriangleup \left(\frac{1}{n s}\right)_j = 0 .$$

Dies ist aber die gleiche Forderung (VII 4,7), die erfüllt sein muß, wenn die Sinusbedingung erfüllt sein soll.

Anders ausgedrückt heißt dies: Ein System mit $d_j' = 0$, für das die Sinusbedingung erfüllt ist [und das frei ist von sphärischer Aberration (s. o.)], besitzt auch keinen Asymmetriefehler (Komafehler).

5. Die Proportionalitätsbedingung

Die Isoplanasiebedingung (VII 1,4)

$$\frac{n_1 \sin u_1}{n_k' \sin u_k'} \cdot \frac{1}{\beta_s'} = 1 + \frac{\triangle s'}{s_k' - \mathring{z}_k'}$$

läßt sich in verschiedenen Formen schreiben, von denen wir hier zunächst die sogenannte Proportionalitätsbedingung besprechen.

Durch Umschreibung von (VII 1,4) erhalten wir

$$\frac{n_1 \sin u_1}{n_k' \sin u_k'} - \beta_s' = \beta_s' \cdot \frac{\triangle s_k'}{(s_k' - \mathring{z}_k')} = \beta_s' \frac{\bar{s}_k' - s_k'}{s_k' - \mathring{z}_k'},$$

$$\boxed{\frac{\bar{s}_k' - s_k'}{\dfrac{n_1 \sin u_1}{n_k' \sin u_k'} - \beta_s'} \left(= \frac{s_k' - \mathring{z}_k'}{\beta_s'} \right) = \text{const}}, \qquad \text{(VII 5,1)}$$

bzw. für $s_1 \to \infty$

$$\boxed{\frac{\bar{s}_k' - s_k'}{\dfrac{n_1 t_1}{n_k' \sin u_k'} - f'} = \text{const}}. \qquad \text{(VII 5,2)}$$

Diese Form bezeichnet man als Proportionalitätsbedingung, da sie besagt, daß $\dfrac{n_1 \sin u_1}{n_k' \sin u_k'} - \beta_s'$ für alle u_1, also über die ganze Öffnung des den Achsenpunkt eines Objektes abbildenden Strahlenbündels, proportional zu $\bar{s}_k' - s_k' = \triangle s'$ sein soll. Sie ist aber — worauf wohl Berek als erster hingewiesen hat — praktisch wertlos, da sich die Aufrundungen in der Logarithmentafel (selbst bei sechsstelligen Logarithmen) so stark auswirken, daß sie auch bei einem *guten* System im allgemeinen *nicht* erfüllt ist. Wie Berek schreibt: „Die Proportionalitätsbedingung ist eher ein Kriterium für die Genauigkeit der Logarithmentafel oder für die Kompensationen der Aufrundungen während der Rechenarbeit als ein Kriterium für die Beseitigung des Asymmetriefehlers.“

6. Das Koinzidenzkriterium

Wir nehmen jetzt eine andere Umformung der Isoplanasiebedingung (VII 1,4) vor:

$$\bar{s}_k' - s_k' = (s_k' - \mathring{z}_k') \left\{ \frac{n_1 \sin u_1}{n_k' \sin u_k'} \frac{1}{\beta_s'} - 1 \right\}.$$

Daraus folgt

$$\boxed{\bar{s}_k' + \frac{\mathring{z}_k' - s_k'}{\beta_s'} \frac{n_1 \sin u_1}{n_k' \sin u_k'} = \mathring{z}_k' = \text{const}}, \qquad \text{(VII 6,1)}$$

bzw. für $s_1 = \infty$

$$\boxed{\bar{s}_k' + \frac{\mathring{z}_k' - s_k'}{-f} \frac{n_1 t_1}{n_k' \sin u_k'} = \mathring{z}_k' = \text{const}}. \qquad \text{(VII 6,1}_\infty)$$

Dies ist das sogenannte „Koinzidenzkriterium". Es besagt, daß die beiden Kurven

$$\tilde{s}'_k = \tilde{s}'_k(u_1) \quad \text{und} \quad \frac{\mathring{z}'_k - s'_k}{\beta'_s} \cdot \frac{n_1 \sin u_1}{n'_k \sin u'_k(u_1)}$$

(und entsprechend bei $s_1 = \infty$: die beiden Kurven

$$\tilde{s}'_k = \tilde{s}'_k(t_1) \quad \text{und} \quad \frac{\mathring{z}'_k - s'_k}{-\bar{f}} \cdot \frac{n_1 t_1}{n'_k \sin u'_k(t_1)}\Bigg)$$

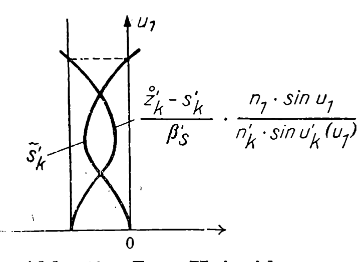


Abb. 50. Zum Koinzidenzkriterium.

sich in der graphischen Darstellung zu einer Parallelen zur u_1-Achse (bzw. t_1-Achse) ergänzen sollen (Abb. 50). $\mathring{z}'_k$ ist dabei der Abstand des Bildes der asymmetriefehlerfreien Blende vom letzten Linsenscheitel, also der AP. Wir können den Faktor

$$\frac{\mathring{z}'_k - s'_k}{\beta'_s} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathring{z}'_k - s'_k}{-\bar{f}}$$

dabei ausdrücken durch Größen, die aus der Berechnung der Flächenteilkoeffizienten bekannt sind.

Beziehen wir die Lage der Blende (der EP) auf den objektseitigen Brennpunkt, bezeichnen wir also $\overrightarrow{F\text{Bl}}$ durch $\mathring{x}$, so ist [wie wir früher (II 2,1) sahen] $\mathring{\beta}' = \frac{-\bar{f}}{\mathring{x}}$. Da nun allgemein $\frac{z'_k - s'_k}{z_1 - s_1} = \frac{n'_k}{n_1} \beta'_s \beta'_z$ für zwei beliebige verschiedene Achsenpunkte (s_1 und z_1) die Tiefenvergrößerung war [siehe (I 6,1)], so erhalten wir, wenn wir diese Formel auf die Blende anwenden, also $(z_1, z'_k, \beta'_z) \equiv (\mathring{z}, \mathring{z}'_k, \mathring{\beta}')$ setzen:

$$-\frac{\mathring{z}'_k - s'_k}{\beta'_s} = \frac{n'_k}{n_1} \frac{(\mathring{z}_1 - s_1)}{\mathring{x}} \bar{f} = \frac{n'_k}{n_1} \bar{f} \frac{\mathring{z}_1 - s_1}{\mathring{z}_1 - z_1(\bar{F})} = \frac{n'_k}{n_1} \bar{f} \frac{s_1}{z_1(\bar{F})} \cdot \frac{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mathring{z}_1}}{\frac{1}{z_1(\bar{F})} - \frac{1}{\mathring{z}_1}},$$

$$\frac{\mathring{z}'_k - s'_k}{\beta'_s} = \frac{\frac{n'_k}{n_1} s_1 \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mathring{z}_1}\right)}{\frac{z_1(\bar{F})}{-\bar{f}} \left(\frac{1}{z_1(\bar{F})} - \frac{1}{\mathring{z}_1}\right)}. \tag{VII 6,2}$$

Nach den Formeln, die wir im Abschnitt III „Eine allgemeine Abbildungsformel" abgeleitet hatten, ergibt sich [vgl. (III 2,1) und (III 2,6)]

$$\frac{z_1(\bar{F})}{-\bar{f}} = \frac{n'_k}{s_k} \frac{t_k}{t_1} \mathfrak{d}_k - \frac{t_1}{t_k}$$

und

$$\frac{1}{z_1(\bar{F})} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{\frac{n_1}{n'_k} s'_k \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2 - n_1 \mathfrak{d}_k} = \frac{1}{s_1} - \frac{n'_k \cdot t_k \cdot \bar{f}}{n_1 s'_k t_1 z_1(\bar{F})}.$$

Somit erhalten wir

$$\left(\frac{1}{z_1(\bar{F})} - \frac{1}{\mathring{z}_1}\right)\frac{z_1(\bar{F})}{\bar{f}} = \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mathring{z}_1}\right)\frac{z_1(\bar{F})}{\bar{f}} - \frac{n_k' t_k}{n_1 s_k' t_1};$$

$$\frac{\left(\frac{1}{z_1(\bar{F})} - \frac{1}{\mathring{z}_1}\right)\frac{z_1(\bar{F})}{\bar{f}}}{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mathring{z}_1}} = \frac{z_1(\bar{F})}{\bar{f}} - \frac{n_k' t_k}{n_1 s_k' t_1}\,\frac{1}{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mathring{z}_1}}. \qquad \text{(VII 6,3)}$$

Nun war die asymmetriefehlerfreie Blende bestimmt durch die Beziehung (VI 3,1)

$$\frac{1}{\mathring{z}_1} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{n_1}\frac{\Sigma \mathsf{A}_\nu}{\Sigma \mathsf{B}_\nu},$$

die sogenannte FRAUNHOFERsche Bedingung, so daß

$$\frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mathring{z}_1} = -\frac{1}{n_1}\frac{\Sigma \mathsf{A}_\nu}{\Sigma \mathsf{B}_\nu}$$

wird, also folgt aus (VII 6,2) und (VII 6,3) mit (VI 3,1)

$$\frac{\mathring{z}_k' - s_k'}{\beta_s'} = \frac{n_k'}{n_1}\cdot s_1 \frac{1}{\frac{n_k' t_k}{s_k' t_1}\mathfrak{d}_k - \frac{t_1}{t_k} + \frac{n_k' t_k}{n_1 s_k' t_1}\cdot\left(-n_1\frac{\Sigma \mathsf{B}_\nu}{\Sigma \mathsf{A}_\nu}\right)}$$

oder

$$\boxed{\frac{\mathring{z}_k' - s_k'}{\beta_s'} = \frac{\frac{n_k'}{n_1} s_1 \frac{t_k}{t_1}}{\frac{n_k'}{s_k'}\left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2\left\{\mathfrak{d}_k - \frac{\Sigma \mathsf{B}_\nu}{\Sigma \mathsf{A}_\nu}\right\} - 1}}. \qquad \text{(VII 6,4)}$$

Diese Beziehung wurde von BEREK abgeleitet. Aus ihr folgt für die Konstante des Koinzidenzkriteriums (VII 6,1), d. h. für den Wert, den die linke Seite von (VII 6,1) für $u_1 = 0$ annimmt, d. h. für $\bar{s}_k' \to s_k'$:

$$\mathring{z}_k' = s_k' + \frac{\frac{n_k'}{n_1} s_1 \frac{t_k}{t_1}\beta_s'}{\frac{n_k'}{s_k'}\left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2\left\{\mathfrak{d}_k - \frac{\Sigma \mathsf{B}_\nu}{\Sigma \mathsf{A}_\nu}\right\} - 1}, \qquad \text{(VII 6,5)}$$

da ja

$$\lim_{u_1 \to 0}\frac{n_1 \sin u_1}{n_k' \sin u_k'} = \beta_s'. \qquad \text{(VII 6,5*)}$$

Analog erhalten wir für $s_1 \to \infty$

$$\mathring{z}'_k = s'_k - \frac{\frac{n'_k}{n_1}\frac{t_k}{t_1}\bar{f}}{\frac{n'_k}{s'_k}\left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2\left\{\mathfrak{d}_k - \frac{\Sigma \mathsf{B}_\nu}{\Sigma \mathsf{A}_\nu}\right\} - 1}. \qquad \text{(VII 6,6)}$$

Fallen speziell die asymmetriefehlerfreien Blenden mit den Hauptpunkten zusammen, so tritt eine wesentliche *Vereinfachung* der gefundenen Beziehung ein. Dann ist nämlich $\mathring{x} = -\bar{f}$ und $\mathring{z}_1 = z_1(H)$, und die Formel für die Tiefenvergrößerung geht über in $\beta'_z = 1$, so daß dann

$$\frac{\mathring{z}'_k - s'_k}{\beta'_s} = \frac{n'_k}{n_1}\left(z_1(H) - s_1\right).$$

Da meist $s_1 \gg z_1(H)$ ist, ist hierin noch oft

$$\frac{\mathring{z}'_k - s'_k}{\beta'_s} \approx -\frac{n'_k}{n_1} s_1, \quad \text{und für} \quad s_1 \to \infty \quad \text{folgt dann nach (I 4,1)} \quad \frac{\mathring{z}'_k - s'_k}{\bar{f}} = +\frac{n'_k}{n_1}.$$

Das Koinzidenzkriterium (VII 6,1)

$$\tilde{s}'_k + \frac{\mathring{z}'_k - s'_k}{\beta'_s} \cdot \frac{n_1 \sin u_1}{n'_k \sin u'_k} = \text{const}$$

geht dann mit (VII 6,5*) über in

$$\boxed{\tilde{s}'_k - s_1 \frac{\sin u_1}{\sin u'_k} = \text{const}} = s'_k - \frac{n'_k}{n_1} s_1 \beta'_s = \mathring{z}'_k, \qquad \text{(VII 6,7)}$$

bzw. für $s_1 \to \infty$ in

$$\boxed{\tilde{s}'_k - \frac{t_1}{\sin u'_k} = \text{const}} = s'_k + \frac{n'_k}{n_1}\bar{f} = \mathring{z}'_k. \qquad \text{(VII 6,8)}$$

Dies ist eine Beziehung, die auch dann noch praktisch gültig bleibt, wenn $\mathring{z}_1$, $\mathring{z}'_k$ verhältnismäßig stark von $z_1(H)$, $z'_k(H)$ abweichen, wenigstens soweit es sich um die *Konstanz* des links stehenden Ausdruckes handelt. Dabei ist diese Konstante dann jedoch *un*gleich $\mathring{z}'_k$.

Den umrahmten Teil der Beziehung (VII 6,7) bzw. (VII 6,8) bezeichnet man dann als „vereinfachtes Koinzidenzkriterium“. Bei ihm ist also die vereinfachende Annahme gemacht, daß die Bilder der asymmetriefehlerfreien Blende mit den Hauptpunkten zusammenfallen oder doch in ihrer Nähe liegen.

BEREK[1] gibt hierfür als Beispiel die Werte, die sich für ein PETZVALsches Porträtobjektiv der Brennweite $\bar{f}' = 0{,}99860$ für $s_1 = \infty$ ergaben:

Öffnungsverhältnis	t_1	$\bar{s}'_k$	u'_k	$\frac{n_1 t_1}{n'_k \sin u'_k}$	Proportionalitätsbedingung	Koinzidenzkriterium	Vereinfachtes Koinzidenzkriterium
1 : ∞	0,0000	0,71179	0°0′ 0″	0,99860	—	−0,771	−0,287
1 : 12	0,0416	141	2°23′17″	838	+1,73	−0,771	−0,287
1 : 9	0,0555	144	3°09′31″	818	+0,83	−0,771	−0,287
1 : 6,8	0,0734	074	4°13′01″	819	+2,56	−0,772	−0,287
1 : 5,1	0,0960	068	5°31′16″	779	+1,37	−0,771	−0,287
1 : 4,0	0,1220	027	7°01′25″	772	+2,01	−0,771	−0,287
1 : 3,4	0,1430	058	8°14′16″	808	+2,33	−0,772	−0,288
					$(s'_k - \mathring{z}'_k)/\bar{f}$	$\mathring{z}'_k$	$(\mathring{z}'_k)$

[1] M. BEREK, Grundlagen der praktischen Optik. Walter de Gruyter u. Co., Berlin 1930 (S. 77).

VIII. Weitere Abbildungsbedingungen

1. Die Zinken-Sommersche Bedingung

Wir wollen jetzt untersuchen, ob es möglich ist, den Astigmatismus bei vorgegebener Lage einer Blende (nicht zu großer Blendenöffnung) und bei vorgegebenem Objektabstand aufzuheben.

Wir gehen dazu von den Formeln für den Astigmatismus aus, die wir in IV 4 abgeleitet hatten, und von untenstehender Zeichnung (Abb. 51), wobei wir annehmen wollen, daß der Punkt I sehr nahe der Achse liege, d. h., daß t_j eine kleine Größe sein möge.

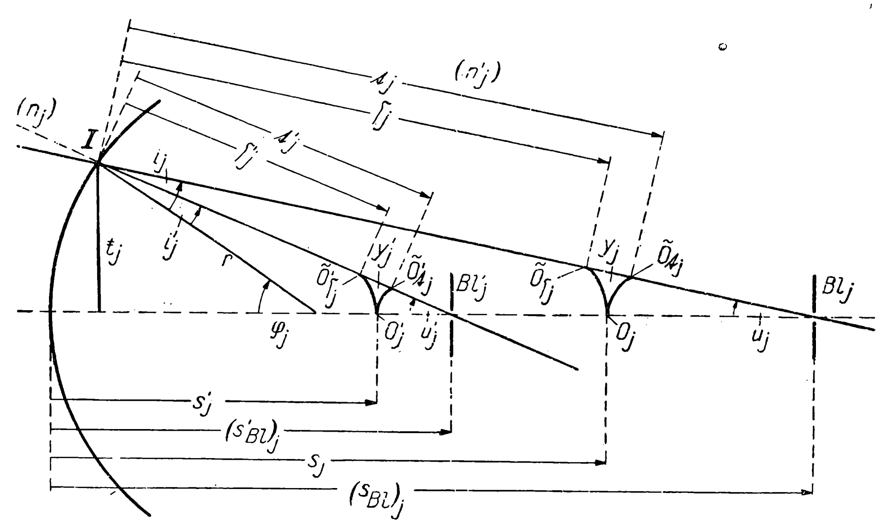


Abb. 51. Zur Ableitung der Zinken-Sommerschen Bedingung für Behebung des Astigmatismus bei gegebenem Objektabstand und gegebener Lage der (sehr engen) Blende $[(s_{\mathrm{Bl}})_j \equiv \mathring{s}_j\,;\ (s'_{\mathrm{Bl}})_j \equiv \mathring{s}'_j]$.

Die Abbildungsformeln für den sagittalen (IV 4,3) und tangentialen (IV 4,2) Strahl lassen sich mit (IV 4,1) wie folgt zusammenfassen:

$$\frac{n' \cos^2 i'}{\mathfrak{t}'} - \frac{n \cos^2 i}{\mathfrak{t}} = D_{\mathrm{sch}} = \frac{n'}{\mathfrak{s}'} - \frac{n}{\mathfrak{s}}\,.$$

Entwickeln wir die hier auftretenden Glieder $\cos^2 i$ und $\cos^2 i'$ je in eine Reihe, wobei wir die höheren Potenzen vernachlässigen, so wird

$$\cos^2 i = 1 - i^2$$

und damit

$$\frac{n'}{\mathfrak{t}'}-\frac{n' i'^2}{\mathfrak{t}'}-\frac{n}{\mathfrak{t}}+\frac{n i^2}{\mathfrak{t}}=\frac{n'}{\mathfrak{s}'}-\frac{n}{\mathfrak{s}}.$$

Nun läßt sich $\frac{1}{\mathfrak{s}}$ wie folgt umformen:

$$\frac{1}{\mathfrak{s}}=\frac{1}{\mathfrak{t}+(\mathfrak{s}-\mathfrak{t})}=\frac{1}{\mathfrak{t}\left(1+\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}}{\mathfrak{t}}\right)}=\frac{1}{\mathfrak{t}}\left(1-\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}}{\mathfrak{t}}\right)=\frac{1}{\mathfrak{t}}-\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}}{\mathfrak{t}^2}.$$

Entsprechendes läßt sich für $\frac{1}{\mathfrak{s}'}$ durchführen. Wir setzen diese beiden Ausdrücke in unsere Abbildungsgleichung ein und erhalten:

$$\underline{\frac{n'}{\mathfrak{t}'}}-\frac{n' i'^2}{\mathfrak{t}'}-\underline{\frac{n}{\mathfrak{t}}}+\frac{n i^2}{\mathfrak{t}}=\underline{\frac{n'}{\mathfrak{t}'}}-\frac{n'}{\mathfrak{t}'^2}(\mathfrak{s}'-\mathfrak{t}')-\underline{\frac{n}{\mathfrak{t}}}+\frac{n}{\mathfrak{t}^2}(\mathfrak{s}-\mathfrak{t}),$$

worin sich die unterstrichenen Glieder gegenseitig fortheben. Wir erhalten so

$$\frac{n'(\mathfrak{s}'-\mathfrak{t}')}{\mathfrak{t}'^2}-\frac{n(\mathfrak{s}-\mathfrak{t})}{\mathfrak{t}^2}=\frac{n' i'^2}{\mathfrak{t}'}-\frac{n i^2}{\mathfrak{t}}. \qquad \text{(VIII 1,1)}$$

Setzen wir voraus, daß die Winkel φ und u so klein sind, daß wir den Sinus des Winkels gleich dem Winkel setzen dürfen, so entnehmen wir aus der Zeichnung (Abb. 51) folgende einfache Beziehung:

$$i=\varphi-u\approx t\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\mathring{s}}\right)=\frac{t}{u}\mathring{Q},$$

die um so besser erfüllt ist, je näher der optischen Achse wir den Schnittpunkt des betrachteten Strahls mit der brechenden Fläche annehmen.

Hierin bedeutet $\mathring{Q}$ die schon öfter benutzte Invariante (I 2,1*), angewandt auf die *Blende* als Objekt,

$$\boxed{\mathring{Q}=n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\mathring{s}}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\mathring{s}'}\right)}. \qquad \text{(VIII 1,2)}$$

Für i' ergibt sich ein entsprechender Wert

$$i'=\frac{t}{n'}\mathring{Q},$$

so daß unsere Gleichung (VIII 1,1) mit diesen Größen übergeht in

$$\frac{n'(\mathfrak{s}'-\mathfrak{t}')}{\mathfrak{t}'^2}-\frac{n(\mathfrak{s}-\mathfrak{t})}{\mathfrak{t}^2}=t^2\mathring{Q}^2\left(\frac{1}{n'\mathfrak{t}'}-\frac{1}{n\mathfrak{t}}\right). \qquad \text{(VIII 1,3)}$$

Ferner können wir in erster Näherung $s\approx\mathfrak{t}$ und $s'\approx\mathfrak{t}'$ setzen, da ja unsere Strahlen nur sehr schwach gegen die optische Achse geneigt sind. Dann können wir unseren auf das *Objekt* angewandten Ausdruck Q auch schreiben

$$Q=n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)\approx n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\mathfrak{t}}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\mathfrak{t}'}\right).$$

Also wird
$$\mathring{Q} - Q = n\left(\frac{1}{\mathfrak{t}} - \frac{1}{\mathring{\mathfrak{s}}}\right) = n'\left(\frac{1}{\mathfrak{t}'} - \frac{1}{\mathring{\mathfrak{s}}'}\right) = n \cdot \frac{\mathring{\mathfrak{s}} - \mathfrak{t}}{\mathring{\mathfrak{s}} \cdot \mathfrak{t}}.$$

Da andererseits, wenn y die Größe des Objektes, d. h. der Achsenabstand des außeraxialen Objektpunktes (mit Bezug auf die betrachtete brechende Fläche) ist, die Beziehung besteht (vgl. Abb. 52)
$$\frac{y}{\mathring{\mathfrak{s}} - \mathfrak{t}} = \frac{t}{\mathring{\mathfrak{s}}},$$
so erhalten wir
$$\mathring{Q} - Q = n \cdot \frac{y}{t\,\mathfrak{t}},$$
d. h.
$$t^2 = \frac{n^2 y^2}{\mathfrak{t}^2}\left(\frac{1}{\mathring{Q} - Q}\right)^2.$$

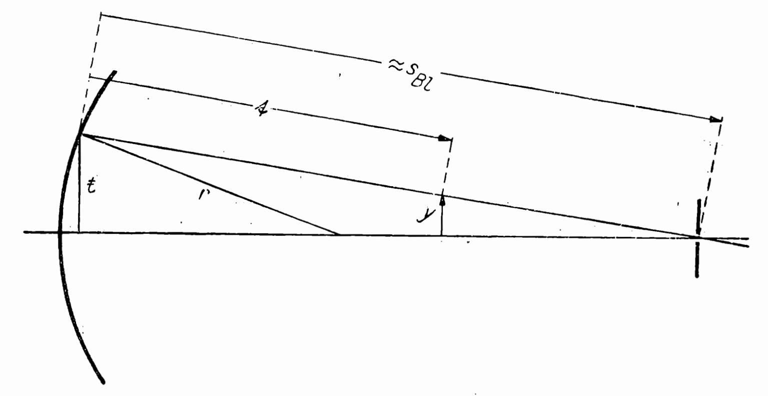


Abb. 52. Zur Ableitung der Beziehung $\frac{y}{s_{\mathrm{Bl}} - t} = \frac{t}{s_{\mathrm{Bl}}}$, worin $s_{\mathrm{Bl}} \equiv \mathring{z} \equiv \mathring{s}$.

Setzen wir diesen Ausdruck in unsere umgeformte Abbildungsgleichung (VIII 1, 3) ein, so nimmt diese die Form an:
$$\frac{n'(\mathfrak{f}' - \mathfrak{t}')}{\mathfrak{t}'^2} - \frac{n(\mathfrak{f} - \mathfrak{t})}{\mathfrak{t}^2} = \frac{n^2 y^2}{\mathfrak{t}^2}\left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q} - Q}\right)^2\left(\frac{1}{n'\mathfrak{t}'} - \frac{1}{n\,\mathfrak{t}}\right),$$
$$\frac{\mathfrak{f}' - \mathfrak{t}'}{n'\,y'^2}\left(\frac{\mathfrak{t}^2 n'^2 y'^2}{\mathfrak{t}'^2 n^2 y^2}\right) - \frac{\mathfrak{f} - \mathfrak{t}}{n\,y^2} = \left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q} - Q}\right)^2\left(\frac{1}{n'\mathfrak{t}'} - \frac{1}{n\,\mathfrak{t}}\right).$$

In I 5 hatten wir den HELMHOLTZschen Satz (I 5,3) kennengelernt, der aussagte, daß $nyu = n'y'u'$.

Beachten wir weiter, daß wir in unserem Falle $u = \frac{t}{s} \approx \frac{t}{\mathfrak{t}}$ und $u' \approx \frac{t}{\mathfrak{t}'}$ setzen können, so geht der HELMHOLTZsche Satz über in
$$ny\,\mathfrak{t}' = n'y'\,\mathfrak{t},$$

d. h., der Faktor bei $\frac{\mathfrak{s}'-\mathfrak{t}'}{n'\,y'^2}$ hat den Wert 1, und es wird

$$\frac{\mathfrak{s}'-\mathfrak{t}'}{n'\,y'^2}-\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}}{n\,y^2}=\left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q}-Q}\right)^2\left(\frac{1}{n'\,\mathfrak{t}'}-\frac{1}{n\,\mathfrak{t}}\right). \qquad \text{(VIII 1,4)}$$

Besteht das abbildende optische System aus mehreren (k) Flächen, so müssen wir über k solcher Gleichungen summieren.

Nun ist aber

$$\left(\frac{\mathfrak{s}'-\mathfrak{t}'}{n'\,y'^2}\right)_j\equiv\left(\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}}{n\,y^2}\right)_{j+1},$$

so daß bei der Summation auf der linken Seite nur die Glieder

$$\left(\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}}{n\,y^2}\right)_1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\mathfrak{s}'-\mathfrak{t}'}{n'\,y'^2}\right)_k$$

übrigbleiben. Die anderen Glieder heben sich fort, und wir erhalten

$$\left(\frac{\mathfrak{s}'-\mathfrak{t}'}{n'\,y'^2}\right)_k-\left(\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}}{n\,y^2}\right)_1=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q}-Q}\right)_j^2\left(\frac{1}{n_j'\,s_j'}-\frac{1}{n_j\,s_j}\right), \qquad \text{(VIII 1,5)}$$

wobei wir noch $\mathfrak{t}\approx s$ und $\mathfrak{t}'\approx s'$ gesetzt haben.

Wir wollen nun annehmen, daß wir es mit einem astigmatismusfreien Objekt zu tun haben, daß also $\mathfrak{s}_1=\mathfrak{t}_1$ ist. Multiplizieren wir nun die so vereinfachte Gleichung (VIII 1,5) mit $n_k'\,y'^2$, so erhalten wir für die Größe des Astigmatismus

$$\mathfrak{s}_k'-\mathfrak{t}_k'=n_k'\,y_k'^2\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q}-Q}\right)_j^2\left(\frac{1}{n'\,s'}-\frac{1}{n\,s}\right)_j=n_k'\,y_k'^2\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q}-Q}\right)_j^2\cdot\Delta\left(\frac{1}{n\,s}\right)_j.$$

Wollen wir nun ein astigmatismusfreies Bild erhalten, so muß die rechtsstehende Summe verschwinden, und wir erhalten die ZINKEN-SOMMER*sche Bedingung* (für astigmatismusfreie Abbildung):

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q}-Q}\right)_j^2\left(\frac{1}{n'\,s'}-\frac{1}{n\,s}\right)_j=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q}-Q}\right)_j^2\Delta\left(\frac{1}{n\,s}\right)_j=0. \qquad \text{(VIII 1,6)}$$

2. Ableitung der drei ersten SEIDELschen Bedingungen aus der ZINKEN-SOMMERschen Bedingung

Die drei ersten SEIDELschen Bedingungen können wir aus der ZINKEN-SOMMERschen Bedingung etwa in folgender Weise ableiten. Wir betrachten dazu wieder die j-te brechende Fläche eines optischen Systems (vgl. Abb. 53). Der betrachtete Strahl möge wieder nur eine geringe Neigung gegen die optische Achse besitzen. Dann gelten (mit $\mathring{z}_j\equiv\mathring{s}_j$) folgende Beziehungen:

$$s_{j-1}'=s_j+d_{j-1}', \qquad \mathring{z}_{j-1}'=\mathring{z}_j+d_{j-1}',$$

$$\mathring{z}_j-s_j=\mathring{z}_{j-1}'-s_{j-1}', \qquad d_{j-1}'=s_{j-1}'-s_j=\mathring{z}_{j-1}'-\mathring{z}_j$$

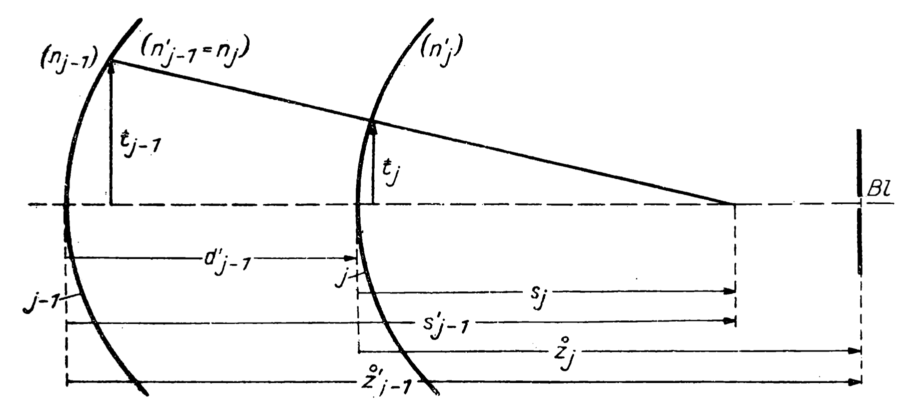


Abb. 53. Zur Ableitung der Beziehungen zwischen s'_{j-1}, s_j, d'_{j-1}, $\mathring{z}_j \,(\equiv \mathring{s}_j)$, $\mathring{z}'_{j-1} \,(\equiv \mathring{s}'_{j-1})$, t_j und t_{j-1}.

sowie

$$\frac{s'_{j-1}}{t_{j-1}} = \frac{s_j}{t_j} \qquad \text{oder} \qquad \frac{s'_{j-1}}{s_j} = \frac{t_{j-1}}{t_j}. \tag{VIII 2,1}$$

Nun ist

$$d'_{j-1} = \frac{d'_{j-1}(\mathring{z}_j - s_j)}{\mathring{z}_j - s_j} = \frac{s'_{j-1}\,\mathring{z}_j - s_j\,\mathring{z}_j - s_j\,\mathring{z}'_{j-1} + \mathring{z}_j\,s_j}{\mathring{z}_j - s_j}$$

$$= \frac{\mathring{z}_j\,s'_{j-1}}{\mathring{z}_j - s_j} - \frac{\mathring{z}'_{j-1}\,s_j}{\mathring{z}'_{j-1} - s'_{j-1}} = \frac{s'_{j-1}}{s_j\left(\frac{1}{s_j} - \frac{1}{\mathring{z}_j}\right)} - \frac{s_j}{s'_{j-1}\left(\frac{1}{s'_{j-1}} - \frac{1}{\mathring{z}'_{j-1}}\right)}$$

$$= \frac{t_{j-1}}{t_j} \cdot \frac{n_j}{n_j\left[\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{\mathring{z}_j}\right) - \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{s_j}\right)\right]}$$

$$- \frac{t_j}{t_{j-1}} \cdot \frac{n'_{j-1}}{n'_{j-1}\left[\left(\frac{1}{r_{j-1}} - \frac{1}{\mathring{z}'_{j-1}}\right) - \left(\frac{1}{r_{j-1}} - \frac{1}{s'_{j-1}}\right)\right]}$$

$$= \frac{t_{j-1} \cdot n_j}{t_j\,(\mathring{Q}_j - Q_j)} - \frac{t_j\,n_j}{t_{j-1}\,(\mathring{Q}_{j-1} - Q_{j-1})},$$

wenn wir beachten, daß $n'_{j-1} = n_j$ ist, und wieder die Invarianten (I 2,1*)

$$Q_j = n_j\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{s_j}\right) = n'_j\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{s'_j}\right) \qquad \text{und} \qquad \mathring{Q}_j = n_j\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{\mathring{z}_j}\right) = n'_j\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{\mathring{z}'_j}\right)$$

einführen.

Dividieren wir unsere Gleichung durch $n_j\, t_j\, t_{j-1}$, so erhalten wir

$$\frac{d'_{j-1}}{n_j\, t_j\, t_{j-1}} = \frac{1}{t_j^2\,(\mathring{Q}_j - Q_j)} - \frac{1}{t_{j-1}^2\,(\mathring{Q}_{j-1} - Q_{j-1})}\,. \qquad \text{(VIII 2,2)}$$

Betrachten wir nicht nur die j-te Fläche, sondern das ganze optische System mit k brechenden Flächen, so müssen wir wieder summieren, und zwar dürfen wir hier natürlich erst mit $j = 2$ beginnen, da ja auch der Index $j - 1$ auftritt. Auf der rechten Seite bleiben nur die Glieder mit den Indizes 1 und k übrig, alle anderen heben sich gerade fort. Formen wir das so erhaltene Ergebnis gleich noch etwas um, so nimmt es die Form an

$$\frac{1}{t_k^2\,(\mathring{Q}_k - Q_k)} = \frac{1}{t_1^2\,(\mathring{Q}_1 - Q_1)} + \sum_{j=2}^{k} \frac{d'_{j-1}}{n_j\, t_j\, t_{j-1}}$$

oder, wenn wir den Summationsbuchstaben um 1 ändern:

$$\frac{1}{t_k^2\,(\mathring{Q}_k - Q_k)} = \frac{1}{t_1^2\,(\mathring{Q}_1 - Q_1)} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{d'_l}{n_{l+1}\, t_l\, t_{l+1}}\,. \qquad \text{(VIII 2,3)}$$

Nun lautet die ZINKEN-SOMMERsche Bedingung (VIII 1,6) für die Aufhebung des Astigmatismus bei vorgegebener Lage einer sehr engen Blende

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\mathring{Q}_j}{\mathring{Q}_j - Q_j}\right)^2 \left(\frac{1}{n'_j\, s'_j} - \frac{1}{n_j\, s_j}\right) = 0\,,$$

wofür wir auch schreiben können

$$\sum_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{Q_j}{\mathring{Q}_j - Q_j}\right)^2 \cdot \Delta \left(\frac{1}{n\, s}\right)_j = 0\,.$$

Setzen wir nun (VIII 2,3) in die ZINKEN-SOMMERsche Bedingung ein, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{k} \left[1 + Q_j\, t_j^2 \left(\frac{1}{t_1^2\,(\mathring{Q}_1 - Q_1)} + \sum_{l=1}^{j-1} \frac{d'_l}{n_{l+1}\, t_l\, t_{l+1}}\right)\right]^2 \Delta \left(\frac{1}{n\, s}\right)_j = 0.$$

Wir formen diesen Ausdruck noch etwas weiter um:

$$\sum_{j=1}^{k} \left[1 + \frac{Q_j \left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2}{\mathring{Q}_1 - Q_1} + Q_j \left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2 \sum_{l=1}^{j-1} \frac{d'_l}{n_{l+1} \left(\frac{t_l}{t_1}\right) \left(\frac{t_{l+1}}{t_1}\right)}\right]^2 \cdot \Delta \left(\frac{1}{n\, s}\right)_j = 0\,. \qquad \text{(VIII 2,4)}$$

Wir wollen nun den in der Summe auftretenden quadratischen Ausdruck ausrechnen.

$$\left[1+\frac{Q_j\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2}{\mathring{Q}_1-Q_1}+Q_j\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2\sum_{l=1}^{j-1}\frac{d_l'}{n_{l+1}\left(\frac{t_l}{t_1}\right)\left(\frac{t_{l+1}}{t_1}\right)}\right]^2=$$

$$=\frac{Q_j^2}{(\mathring{Q}_1-Q_1)^2}\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^4+2\frac{Q_j\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2}{\mathring{Q}_1-Q_1}\left\{1+Q_j\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2\sum_{l=1}^{j-1}\frac{d_l'}{n_{l+1}\left(\frac{t_l}{t_1}\right)\left(\frac{t_{l+1}}{t_1}\right)}\right\}+$$

$$+\left\{1+Q_j\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2\sum_{l=1}^{j-1}\frac{d_l'}{n_{l+1}\left(\frac{t_l}{t_1}\right)\left(\frac{t_{l+1}}{t_1}\right)}\right\}^2. \qquad \text{(VIII 2,4a)}$$

Hierbei tritt nur noch ein einziger Ausdruck auf, der von der *Lage der Blende* abhängig ist, nämlich $(\mathring{Q}_1 - Q_1)$.

Die ZINKEN-SOMMERsche Bedingung gilt für die Aufhebung des Astigmatismus *bei vorgegebener Blendenlage. Unabhängig* von der Blendenlage wird sich also ein einwandfreies Bild — in den Grenzen der betrachteten Näherung — ergeben, *wenn auch die Einzelausdrücke*, die mit dem Faktor $\frac{1}{\mathring{Q}_1-Q_1}$ versehen sind, *für sich verschwinden.* Man erhält dann also aus (VIII 2,4) unter Berücksichtigung von (VIII 2,4a), wenn wir noch die Abkürzungen einführen, wie wir sie bei der SEIDELschen Bildfehlertheorie [vgl. (VI 2,5) bis (VI 2,7)] verwendeten, die Bedingungen

1. $$\sum_{j=1}^{k}Q_j^2\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^4\cdot\triangle\left(\frac{1}{n\,s}\right)_j=\sum_{j=1}^{k}\mathsf{A}_j=0\,,$$

2. $$\sum_{j=1}^{k}Q_j\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2\left\{1+Q_j\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2\sum_{l=2}^{j}\frac{d_{l-1}'}{n_l\left(\frac{t_l}{t_1}\right)\left(\frac{t_{l-1}}{t_1}\right)}\right\}\triangle\left(\frac{1}{n\,s}\right)_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{1}{\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2Q_j}+\sum_{l=2}^{j}\frac{d_{l-1}'}{n_l\left(\frac{t_l}{t_1}\right)\left(\frac{t_{l-1}}{t_1}\right)}\right\}\cdot\mathsf{A}_j$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\{\varepsilon_j+\mathfrak{d}_j\}\,\mathsf{A}_j=\sum_{j=1}^{k}\tau_j\,\mathsf{A}_j=\sum_{j=1}^{k}\mathsf{B}_j=0\,,$$

und demnach auch:

$$3.\quad \sum_{j=1}^{k} Q_j^2 \left(\frac{t_j}{t_1}\right)^4 \left\{ \frac{1}{\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2 Q_j} + \sum_{l=2}^{j} \frac{d'_{l-1}}{n_l \left(\frac{t_l}{t_1}\right)\left(\frac{t_{l-1}}{t_1}\right)} \right\}^2 \Delta \left(\frac{1}{n s}\right)_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \tau_j^2 \mathsf{A}_j = \sum_{j=1}^{k} \tau_j \mathsf{B}_j = \sum_{j=1}^{k} \Gamma_j = 0\,.$$

Sind diese drei Bedingungen, die wir früher schon bei der Betrachtung der SEIDELschen Flächenteilkoeffizienten [vgl. VI 2] kennengelernt haben, gleichzeitig erfüllt, so ist — entsprechend dem früher bereits gefundenen Ausdruck für den Astigmatismus:

$$\frac{1}{2}(\Sigma III_\nu - \Sigma IV_\nu) = \zeta^2 \Sigma \mathsf{A}_\nu + 2\zeta \Sigma \mathsf{B}_\nu + \Sigma \Gamma_\nu$$

— der Astigmatismus unabhängig von der Blendenlage behoben, da ja dann

$$\frac{1}{2}(\Sigma III_\nu - \Sigma IV_\nu) = 0$$

ist, und zwar unabhängig von ζ, wo

$$\zeta = \frac{1}{n_1\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mathring{z}_1}\right)} = \frac{1}{\mathring{Q}_1 - Q_1}$$

war.

3. Bildfeldkrümmung und PETZVAL-Bedingung

a) *Berechnung der Bildpunktkoordinaten* $(y'_\mathfrak{f},\ z'_\mathfrak{f})$ *und* $(y'_\mathfrak{t},\ z'_\mathfrak{t})$

Ein außeraxialer Punkt eines Objektes werde durch ein enges, durch die Blendenöffnung bestimmtes Strahlenbündel abgebildet. Der Hauptstrahl dieses Bündels habe bildseitig die Neigung u'_k gegen die Systemachse. Die „Bildpunktkoordinaten" geben die Lage des sagittalen und tangentialen Bildpunktes mit Bezug auf die paraxiale Bildebene an, und zwar bezeichne — wie in Abb. 54 — die *z-Koordinate den Abstand* des betreffenden Bildpunktes *von der paraxialen Bildebene* und die *y-Koordinate den von der optischen* Achse. Sind die beiden x-Koordinaten für alle Strahlen gleich Null, so liegt keine Bildfeldwölbung vor.

Zur Ableitung der Bildpunktkoordinaten betrachten wir das von einem außeraxialen Punkte ausgehende (wenig geöffnete) Strahlenbündel nach der Brechung an der letzten Fläche des optischen Systems. Ferner sei die paraxiale Bildebene durch ihren Abstand $(s'_k)_0$ vom letzten Flächenscheitel gegeben. Außerdem wollen wir die Lage des sagittalen (U) und des tangentialen (V) Bildpunktes als bekannt voraussetzen, d. h., die Größen $\mathfrak{f}'_k$ und $\mathfrak{t}'_k$ seien aus der Berechnung des Astigmatismus dieses Bündels bekannt. Die z-Koordinate des

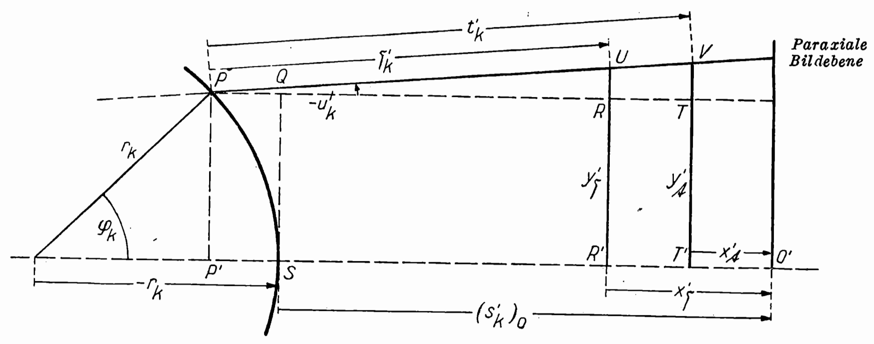


Abb. 54. Zur Berechnung der Bildpunktkoordinaten*)
$z'_\mathfrak{f}$, $y'_\mathfrak{f}$, $z'_\mathfrak{t}$, $y'_\mathfrak{t}$ aus $\mathfrak{f}'_k$, $\mathfrak{t}'_k$, r'_k, u'_k, $(s'_k)_0$ und φ_k, worin $(s'_k)_0 = (s'_k)_{u_1=0}$.

sagittalen Strahles läßt sich dann nach der Abb. 54 aus mehreren Größen zusammensetzen.

$$z'_\mathfrak{f} = \overrightarrow{O'R'} = \overrightarrow{O'S} + \overrightarrow{SR'} = \overrightarrow{O'S} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{O'S} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$$
$$= \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{SO'} = \mathfrak{f}'_k \cos u'_k + r_k\,(1 - \cos\varphi_k) - (s'_k)_0\,. \qquad \text{(VIII 3,1)}$$

Desgleichen erhält man für die anderen Koordinaten

$$z'_\mathfrak{t} = \overrightarrow{O'T'} = \overrightarrow{O'S} + \overrightarrow{ST'} = \overrightarrow{O'S} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{O'S} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PT}$$
$$= \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{SO'} = \mathfrak{t}'_k \cos u'_k + r_k\,(1 - \cos\varphi_k) - (s'_k)_0\,; \qquad \text{(VIII 3,2)}$$
$$y'_\mathfrak{f} = \overrightarrow{R'U} = \overrightarrow{R'R} + \overrightarrow{RU} = \overrightarrow{P'P} - \overrightarrow{UR} = r_k \sin\varphi_k - \mathfrak{f}'_k \sin u'_k\,; \qquad \text{(VIII 3,3)}$$
$$y'_\mathfrak{t} = \overrightarrow{T'V} = \overrightarrow{T'T} + \overrightarrow{TV} = \overrightarrow{P'P} - \overrightarrow{VT} = r_k \sin\varphi_k - \mathfrak{t}'_k \sin u'_k\,. \qquad \text{(VIII 3,4)}$$

Bei der Ableitung dieser Koordinaten muß man — wie stets — darauf achten, die auftretenden optischen Größen (z. B. die Schnittweiten) mit dem richtigen Vorzeichen einzusetzen (vgl. I 1).

b) *Zur Bildfeldkrümmung*

Wir betrachten jetzt wieder eine brechende Fläche eines optischen Systems. Das durch das Teilsystem bis zur *vorhergehenden* Fläche gelieferte Bild unseres (kleinen) ausgedehnten Objektes werde — als Objekt $O\bar{O}$ für die neue Fläche betrachtet — durch diese abgebildet. Wir wollen nun annehmen, daß unser Objekt bereits eine Bildfeldkrümmung vom Krümmungsradius ϱ_K besitze. Dann hat auch im allgemeinen das Bild eine Krümmung, deren Radius ϱ'_K sei. Als abbildende Strahlen betrachten wir einmal den Hauptstrahl, der zum äußersten Punkt unseres Objektes gehört, und zum anderen einen Strahl

*) Statt t'_k lies: $\mathfrak{t}'_k$, statt $x'_\mathfrak{f}$, $x'_\mathfrak{t}$ lies: $z'_\mathfrak{f}$, $z'_\mathfrak{t}$.

durch das Krümmungszentrum unserer brechenden Fläche. Analog den bisher benutzten Größen führen wir auch hier wieder ein:

s bzw. s' Objekt- bzw. Bildweite,

$\mathring{z}$ bzw. $\mathring{z}'$ Blendenbildlage (Lage der EP bzw. AP mit Bezug auf die betrachtete brechende Fläche),

m bzw. m' Abstand des Objektes bzw. Bildes vom *Krümmungszentrum* der brechenden Fläche,

$\bar{q}$ bzw. q' Abstand des Krümmungsmittelpunktes des Objektes bzw. Bildes vom *Krümmungszentrum* der brechenden Fläche.

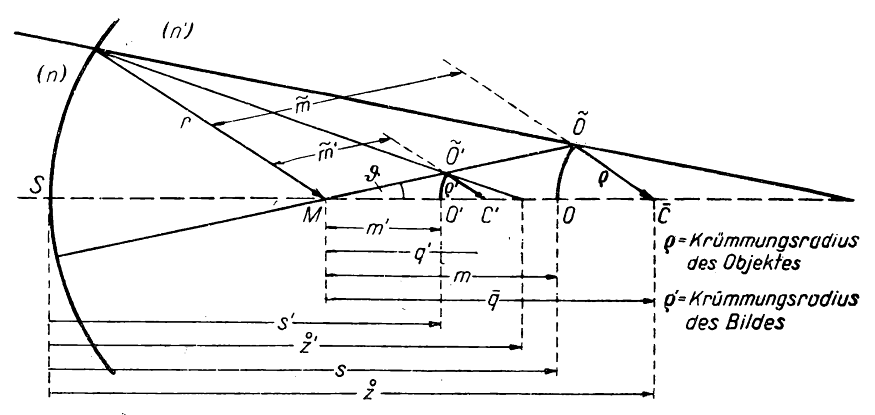


Abb. 55. Zur Berechnung der Beziehung zwischen der Krümmung eines Objektes und der Krümmung des konjugierten Bildes.

Für diese Abbildung gilt, wenn wir der Einfachheit halber wieder nur einen sehr engen Bereich um die optische Achse betrachten, die paraxiale Abbildungsformel (I 2,1)

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \, .$$

In unserem Falle ist nun

$$m = s - r, \qquad m' = s' - r$$

oder

$$s = m + r, \qquad s' = m' + r \, . \tag{VIII 3,5}$$

Formen wir die Abbildungsformel um, so erhalten wir

$$n' s r - n s' r = n' s s' - n s s',$$

$$n s' (s - r) = n' s (s' - r) \, .$$

Dafür können wir schreiben, wenn wir die Beziehungen (VIII 3,5) zweimal anwenden:

$$n s' m = n' s m',$$
$$n m' m + n m r = n' m' m + n' m' r .$$

Dies umgeformt ergibt

$$\frac{n}{m'} - \frac{n'}{m} = \frac{n' - n}{r}, \qquad \text{(VIII 3,6)}$$

d.h. also, für die Abstände des Objektes und des Bildes vom *Krümmungsmittelpunkt* der brechenden Fläche gilt eine der paraxialen Abbildungsformel (I 2, 1) *ähnliche,* aber bezüglich Objekt- und Bildabstand vertauschte Formel.

Entsprechend findet man, wenn $\tilde{m}$ und $\tilde{m}'$ die Abstände von $\tilde{O}$ bzw. $\tilde{O}'$ vom Krümmungsmittelpunkt M bezeichnen, da $\tilde{O}$ und $\tilde{O}'$ gleichfalls auf einem durch M gehenden Strahl liegen:

$$\frac{n}{\tilde{m}'} - \frac{n'}{\tilde{m}} = \frac{n' - n}{r}. \qquad \text{(VIII 3,7)}$$

Bezeichnen wir die Krümmungsradien vom Objekt und Bild durch ϱ_K bzw. ϱ'_K, ihre Krümmungs*mittel*punkte durch $\bar{C}$ bzw. C', so ist

$$m = \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CO} = \bar{q} + \varrho_K ,$$
$$m' = \overrightarrow{MO'} = \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'O'} = q' + \varrho'_K .$$

Die Bildfeld-Krümmungsradien ϱ und ϱ' werden also als *positiv* gerechnet, wenn die (gekrümmten) Bildflächen zur brechenden Fläche hin ***konkav*** sind (s. S. 66), so daß also in Abb. 55 $\varrho = -\overrightarrow{OC} < 0$ ist.

Damit wird aus (VIII 3,6)

$$\frac{n}{q' + \varrho'_K} - \frac{n'}{\bar{q} + \varrho_K} = \frac{n' - n}{r}$$

oder

$$n\left(\frac{1}{q' + \varrho'_K} + \frac{1}{r}\right) = n'\left(\frac{1}{\bar{q} + \varrho_K} + \frac{1}{r}\right)$$

und mit (VIII 3,7)

$$n\left(\frac{1}{q' + \varrho'_K} - \frac{1}{\tilde{m}'}\right) = n'\left(\frac{1}{\bar{q} + \varrho_K} - \frac{1}{\tilde{m}}\right). \qquad \text{(VIII 3,8)}$$

Aus nebenstehender Abb. 56, die eine Ausschnittsvergrößerung aus der Abb. 55 darstellt, ersieht man, daß sich ϱ_K nach dem Cosinussatz ausdrücken läßt durch

$$\varrho_K^2 = \tilde{m}^2 + \bar{q}^2 - 2\,\tilde{m}\bar{q}\cos\vartheta = \tilde{m}^2 + \bar{q}^2 - 2\,\bar{q}\,\tilde{m}\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) = (\tilde{m} - \bar{q})^2 + \bar{q}\tilde{m}\,\vartheta^2 .$$

Daraus erhält man für $\dfrac{\varrho_K}{\tilde{m} - \bar{q}}$

$$\frac{\varrho_K}{\tilde{m} - \bar{q}} = \sqrt{1 + \frac{\bar{q}\,\tilde{m}\,\vartheta^2}{(\tilde{m} - \bar{q})^2}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\bar{q}\,\tilde{m}\,\vartheta^2}{(\tilde{m} - \bar{q})^2}$$

oder

$$\varrho_K = \tilde{m} - \bar{q} + \frac{1}{2}\frac{\bar{q}\,\tilde{m}}{\tilde{m}-\bar{q}}\vartheta^2 .$$

Formt man diesen Ausdruck weiter um, so ergibt sich

$$\frac{\bar{q}+\varrho_K}{\tilde{m}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\bar{q}}{\tilde{m}-\bar{q}}\vartheta^2$$

bzw.

$$\frac{\tilde{m}}{\bar{q}+\varrho_K} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\bar{q}}{\tilde{m}-\bar{q}}\vartheta^2$$

oder

$$\frac{1}{\bar{q}+\varrho_K} - \frac{1}{\tilde{m}} = -\frac{1}{2}\frac{\bar{q}}{\tilde{m}\,(\tilde{m}-\bar{q})}\vartheta^2 . \qquad \text{(VIII 3,9)}$$

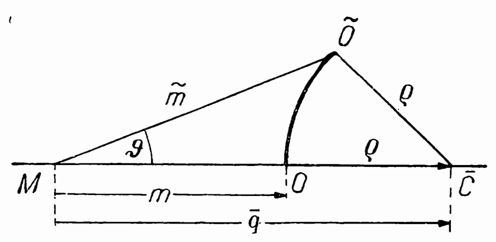


Abb. 56. Zur Ableitung der Beziehung $\varrho_k^2 = (\tilde{m} - \bar{q})^2 + \bar{q}\,\tilde{m}\,\vartheta^2$.

Analog erhalten wir, da $\tilde{O}'$ auf dem Strahl $M\tilde{O}$ durch den Krümmungsmittelpunkt M der betreffenden Fläche liegt:

$$\frac{1}{q'+\varrho_K'} - \frac{1}{\tilde{m}'} = -\frac{1}{2}\frac{q'}{\tilde{m}'\,(\tilde{m}'-q')}\vartheta^2 . \qquad \text{(VIII 3,10)}$$

Setzen wir (VIII 3,9) und (VIII 3,10) in (VIII 3,8) ein und kürzen gleich durch $\frac{\vartheta^2}{2}$, so erhalten wir

$$\frac{n\,q'}{\tilde{m}'\,(\tilde{m}'-q')} = \frac{n'\,q}{\tilde{m}\,(\tilde{m}-\bar{q})} . \qquad \text{(VIII 3,11)}$$

Nun war aber

$$\tilde{m} \approx m = \bar{q} + \varrho_K$$

und

$$\tilde{m}' \approx m' = q' + \varrho_K'$$

oder

$$\tilde{m} - \bar{q} \approx \varrho_K , \qquad \tilde{m}' - q' \approx \varrho_K' ,$$

$$-\bar{q} \approx \varrho_K - \tilde{m} , \qquad -q' \approx \varrho_K' - \tilde{m}' ,$$

so daß wir aus (VIII 3,11) erhalten

$$\frac{n\,(m'-\varrho'_K)}{m'\,\varrho'_K}=\frac{n'\,(m-\varrho_K)}{m\,\varrho_K}$$

oder

$$\frac{n}{\varrho'_K}-\frac{n'}{\varrho_K}=\frac{n}{m'}-\frac{n'}{m}=\frac{n'-n}{r}$$

bzw.

$$\frac{1}{n'\varrho'_K}-\frac{1}{n\,\varrho_K}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right). \qquad \text{(VIII 3,12)}$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir also aus der Krümmung des Objektes die des Bildes berechnen, wobei selbstverständlich vorausgesetzt ist, daß die von den einzelnen Objektpunkten ausgehenden (Meridional-)Strahlen sich in den zugehörigen konjugierten Bildpunkten treffen, sphärische Aberration, Komafehler (und Astigmatismus) bei der Abbildung also behoben sind.

Betrachten wir nun ein optisches System aus mehreren brechenden Flächen, so wissen wir, daß dort folgende Beziehungen erfüllt sind:

$$(\varrho'_K)_j=(\varrho_K)_{j+1} \qquad \text{und} \qquad n'_j=n_{j+1}\,.$$

Summieren wir also die Formel (VIII 3,12)

$$\frac{1}{n'_j\,(\varrho'_K)_j}-\frac{1}{n_j\,(\varrho_K)_j}=\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{n_j}-\frac{1}{n'_j}\right)$$

von $j=1$ bis $j=k$, wobei k die Anzahl der brechenden Flächen des Systems bedeutet, so heben sich auf der linken Seite alle Glieder bis auf $\frac{1}{n'_k\,(\varrho'_K)_k}$ und $\frac{1}{n_1\,(\varrho_K)_1}$ weg.

Wir erhalten also folgenden einfachen Ausdruck

$$\frac{1}{n'_k\,(\varrho'_K)_k}-\frac{1}{n_1\,(\varrho_K)_1}=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{n_j}-\frac{1}{n'_j}\right)=\sum_{j=1}^{k}\frac{n'_j-n_j}{n_j\,n'_j\,r_j}=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j\,f'_j}=+\sum_{j=1}^{k}\mathsf{P}_j\,.$$

Nehmen wir jetzt an, daß das Objekt eben ist, so fällt das zweite Glied der linken Seite fort, da $(\varrho_K)_1=\infty$ wird, und wir erhalten

$$\boxed{\frac{1}{n'_k\,(\varrho'_K)_k}=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j\,f'_j}} \qquad \text{für} \qquad (\varrho_K)_1=\infty\,. \qquad \text{(VIII 3,13)}$$

Stellen wir nun die Bedingung, daß unser Bild gleichfalls wieder eben sein soll, so muß $(\varrho'_K)_k=\infty$ sein, und wir erhalten die PETZVAL-Bedingung für die Bildfeldebnung

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{n_j}-\frac{1}{n'_j}\right)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j\,f'_j}=0}\,. \qquad \text{(VIII 3,14)}$$

4. Ableitung der PETZVAL-Bedingung für die Bildfeldebnung mit Hilfe der Abbildungsformel für sagittale Strahlen

Zu diesem Zweck betrachten wir (Abb. 57) wieder die Vorgänge an der j-ten brechenden Fläche eines optischen Systems. Der einfallende Hauptstrahl treffe die brechende Fläche mit dem Radius r in dem Punkte I und werde dort gebrochen. (i = Einfallswinkel, i' = Brechungswinkel.) Das Lot von I auf die optische Achse nennen wir wieder t. Das Objekt $O\tilde{O}$ wollen wir als gekrümmt annehmen mit dem Scheitelkrümmungsradius $(\varrho_K)_j$, sein Abstand vom Flächenscheitel sei wieder s_j, desgleichen $\mathring{z}_j$ die Lage des Blendenbildes (mit Bezug auf die j-te Fläche). Entsprechend setzen wir das gekrümmte Bild $O'\tilde{O}'$ mit dem Bildkrümmungsradius $(\varrho'_K)_j$ an. Dann erhalten wir für die drei Punkte

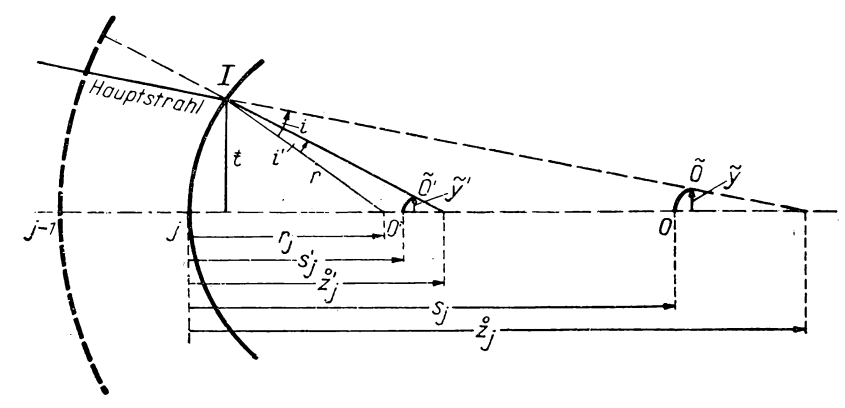


Abb. 57. Zur Ableitung der PETZVAL-Bedingung $\sum_{j=1}^{k'} \frac{1}{r_j} \Delta \left(\frac{1}{n}\right)_j = 0$ für Bildfeldebnung. ($\mathring{z} \equiv \mathring{s}$).

I, $\tilde{O}$, $\tilde{O}'$ auf dem Hauptstrahl folgende Koordinaten, bezogen auf den Scheitel der brechenden Fläche, *wenn wir den Index K bei ϱ und ϱ'* sowie den sich auf die betreffende Fläche beziehenden *Index j vorübergehend fortlassen*:

$$I \equiv \left(\frac{t^2}{2r},\ t\right), \qquad \tilde{O} \equiv \left(s + \frac{\tilde{y}^2}{2\varrho},\ \tilde{y}\right), \qquad \tilde{O}' \equiv \left(s' + \frac{\tilde{y}'^2}{2\varrho'},\ \tilde{y}'\right).$$

Für den Objektabstand auf dem Hauptstrahl $\overline{I\tilde{O}}$, d. h. die sagittale Schnittweite, erhalten wir nach den bekannten Formeln der analytischen Geometrie

$$\overline{I\tilde{O}} = \left\{\left(s + \frac{\tilde{y}^2}{2\varrho} - \frac{t^2}{2r}\right)^2 + (\tilde{y} - t)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = s\left\{\left(1 + \frac{\tilde{y}^2}{2\varrho s} - \frac{t^2}{2rs}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{y} - t}{s}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Bilden wir hiervon den reziproken Wert und entwickeln wir den so erhaltenen Wert in eine Potenzreihe, wobei wir die höheren Glieder vernachlässigen, so

finden wir

$$\frac{1}{\overline{I\tilde{O}}}=\frac{1}{s}\left\{\left(1+\frac{\tilde{y}^2}{2\varrho s}-\frac{t^2}{2rs}\right)^2+\left(\frac{\tilde{y}-t}{s}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{s}\left\{1-\frac{\tilde{y}^2}{2\varrho s}+\frac{t^2}{2rs}-\frac{(\tilde{y}-t)^2}{2s^2}+\cdots\right\}=\frac{1}{\mathfrak{f}}. \qquad \text{(VIII 4, 1)}$$

Entsprechend erhält man für die optisch konjugierte Größe $\overline{I\tilde{O}'}$

$$\frac{1}{\overline{I\tilde{O}'}}=\frac{1}{s'}\left\{1-\frac{\tilde{y}'^2}{2\varrho' s'}+\frac{t^2}{2rs'}-\frac{(\tilde{y}'-t)^2}{2s'^2}+\cdots\right\}=\frac{1}{\mathfrak{f}'}. \qquad \text{(VIII 4, 2)}$$

Nun gilt für die Abbildung der sagittalen Strahlen die Beziehung (IV 4, 3)

$$D_{\text{sch}}=\frac{n'\cos i'-n\cos i}{r}=\frac{n'}{\mathfrak{f}'}-\frac{n}{\mathfrak{f}}=\frac{n'}{\overline{I\tilde{O}'}}-\frac{n}{\overline{I\tilde{O}}}$$

oder bei Berücksichtigung von (VIII 4, 1) und (VIII 4, 2)

$$D_{\text{sch}}=\frac{n'}{s'}\left\{1-\frac{\tilde{y}'^2}{2\varrho' s'}+\frac{t^2}{2rs'}-\frac{(\tilde{y}'-t)^2}{2s'^2}\right\}-\frac{n}{s}\left\{1-\frac{\tilde{y}^2}{2\varrho s}+\frac{t^2}{2rs}-\frac{(\tilde{y}-t)^2}{2s^2}\right\}. \qquad \text{(VIII 4, 3)}$$

Entwickeln wir die $\cos i$ und $\cos i'$ in eine Reihe, wobei wir höhere Potenzen vernachlässigen, so erhalten wir für die linke Seite unserer obigen Gleichung

$$D_{\text{sch}}=\frac{n'\cos i'-n\cos i}{r}=\frac{n'-n}{r}-\frac{n'i'^2-n\,i^2}{2r}.$$

Weiter wissen wir, daß für kleine Winkel

$$i=\varphi-u=t\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\mathring{z}}\right)=\frac{t}{n}\mathring{Q} \qquad \text{und} \qquad i'=\frac{t}{n'}\mathring{Q}$$

gilt. Außerdem läßt sich folgende Beziehung ableiten:

$$\tilde{y}=t\,\frac{\mathring{z}-s}{\mathring{z}}=\frac{t\cdot s}{n}\cdot n\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{\mathring{z}}\right)=\frac{t\,s}{n}(\mathring{Q}-Q).$$

Entsprechend:

$$\tilde{y}'=\frac{t\,s'}{n'}(\mathring{Q}-Q).$$

Führen wir alle diese eben abgeleiteten Größen in (VIII 4, 3) ein, so erhalten wir

$$\frac{n'-n}{r}-\frac{t^2\cdot\mathring{Q}^2}{2r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{n'}{s'}\left\{1-\frac{t^2(\mathring{Q}-Q)^2 s'}{2\varrho' n'^2}+\frac{t^2}{2rs'}-\frac{t^2}{2s'^2}\cdot\left[\frac{s'}{n'}(\mathring{Q}-Q)-1\right]^2\right\}$$

$$-\frac{n}{2}\left\{1-\frac{t^2(\mathring{Q}-Q)^2 s}{2\varrho n^2}+\frac{t^2}{2rs}-\frac{t^2}{2s^2}\cdot\left[\frac{s}{n}(\mathring{Q}-Q)-1\right]^2\right\}.$$

Diese Gleichung läßt sich vereinfachen. Man bekommt schließlich, wenn man noch durch $(\mathring{Q} - Q)^2$ dividiert:

$$\frac{1}{\varrho n} - \frac{1}{\varrho' n'} = -\frac{\mathring{Q}^2}{(\mathring{Q}-Q)^2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{n'}{s'^2}-\frac{n}{s^2}\right)\cdot\frac{1}{(\mathring{Q}-Q)^2}$$
$$+ \frac{n'}{s'}\left[\frac{1}{n'}-\frac{1}{s'(\mathring{Q}-Q)}\right]^2 - \frac{n}{s}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{s(\mathring{Q}-Q)}\right]^2.$$

Wir formen weiter um:

$$\frac{1}{\varrho' n'} - \frac{1}{\varrho n} = \frac{\mathring{Q}^2}{(\mathring{Q}-Q)^2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right) + \underline{\frac{1}{(\mathring{Q}-Q)^2}\left(\frac{n'}{s'^2}-\frac{n}{s^2}\right)\cdot\frac{1}{r}}$$
$$+ \underline{\frac{2}{\mathring{Q}-Q}\left(\frac{1}{s'^2}-\frac{1}{s^2}\right)} - \underline{\frac{1}{(\mathring{Q}-Q)^2}\left(\frac{n'}{s'^3}-\frac{n}{s^3}\right)} - \left(\frac{1}{n's'}-\frac{1}{ns}\right).$$

Die – – – -Glieder lassen sich wegen (I 2, 1*) zusammenfassen. Wir erhalten dann, wenn wir noch das – · – · – -Glied mit $(\mathring{Q} - Q)$ erweitern:

$$\frac{1}{n'\varrho'} - \frac{1}{n\varrho} = \frac{\mathring{Q}^2}{(\mathring{Q}-Q)^2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right) + \underline{\frac{Q}{(\mathring{Q}-Q)^2}\left(\frac{1}{s'^2}-\frac{1}{s^2}\right)}$$
$$- \left(\frac{1}{n's'}-\frac{1}{ns}\right) + \underline{\frac{2(\mathring{Q}-Q)}{(\mathring{Q}-Q)^2}\left(\frac{1}{s'^2}-\frac{1}{s^2}\right)}.$$

Dies vereinfacht sich weiter zu

$$\frac{1}{n'\varrho'} - \frac{1}{n\varrho} = \frac{\mathring{Q}}{(\mathring{Q}-Q)^2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right) + \frac{2\,\mathring{Q}-Q}{(\mathring{Q}-Q)^2}\left(\frac{1}{s'^2}-\frac{1}{s^2}\right) - \left(\frac{1}{n's'}-\frac{1}{ns}\right). \tag{VIII 4,4}$$

Wir wollen jetzt im einzelnen die Glieder der rechten Seite unserer Gleichung (VIII 4,4) weiter vereinfachen. Wir erhalten dann:

a) $$\frac{\mathring{Q}^2}{(\mathring{Q}-Q)^2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right) - \frac{Q^2}{(\mathring{Q}-Q)^2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right) + \frac{2Q\mathring{Q}}{(\mathring{Q}-Q)^2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right) + \frac{(2\,\mathring{Q}-Q)}{(\mathring{Q}-Q)^2}\,Q\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right).$$

Nun ist

$$Q = n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right),$$

also

$$Q \cdot \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r\,s'}-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r\,s}=\frac{1}{r\,s}-\frac{1}{r\,s'}.$$

Somit wird

$$\frac{\mathring{Q}^2}{(\mathring{Q}-Q)^2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right)+\frac{(2\,\mathring{Q}-Q)}{(\mathring{Q}-Q)^2}\,\frac{1}{r}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s'}\right).$$

b) Wir wollen jetzt gleich das 2. Glied der rechten Seite unserer ursprünglichen Gleichung (VIII 4,4) und das 2. Glied des eben für das 1. Glied der ursprünglichen Gleichung erhaltenen Ausdruckes zusammenfassen:

$$\frac{2\,\mathring{Q}-Q}{(\mathring{Q}-Q)^2}\left(\frac{1}{s'^2}-\frac{1}{s^2}\right)+\frac{2\,\mathring{Q}-Q}{(\mathring{Q}-Q)^2}\cdot\left(\frac{1}{r\,s}-\frac{1}{r\,s'}\right)=\frac{2\,\mathring{Q}-Q}{(\mathring{Q}-Q)^2}\left(\frac{1}{s}\,\frac{Q}{n}-\frac{1}{s'}\,\frac{Q}{n'}\right)$$

$$=\frac{2\,\mathring{Q}\,Q-Q^2}{(\mathring{Q}-Q)^2}\left(\frac{1}{n\,s}-\frac{1}{n'\,s'}\right).$$

c) Addieren wir den eben erhaltenen Ausdruck zum 3. Glied der rechten Seite unserer Ausgangsgleichung (VIII 4,4), so erhalten wir

$$-\left(\frac{1}{n'\,s'}-\frac{1}{n\,s}\right)+\frac{2\,\mathring{Q}\,Q-Q^2}{(\mathring{Q}-Q)^2}\left(\frac{1}{n\,s}-\frac{1}{n'\,s'}\right)=\frac{(\mathring{Q}-Q)^2+2\,\mathring{Q}\,Q-Q^2}{(\mathring{Q}-Q)^2}\left(\frac{1}{n\,s}-\frac{1}{n'\,s'}\right)$$

$$=\left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q}-Q}\right)^2\left(\frac{1}{n\,s}-\frac{1}{n'\,s'}\right).$$

Damit vereinfacht sich unsere Ausgangsgleichung (VIII 4,4) zu folgendem Ausdruck:

$$\frac{1}{n'\,\varrho'}-\frac{1}{n\,\varrho}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q}-Q}\right)^2\left(\frac{1}{n\,s}-\frac{1}{n'\,s'}\right). \qquad \text{(VIII 4,5)}$$

Durch sukzessive Addition über alle (k) brechenden Flächen des optischen Systems findet man so, da

$$\frac{1}{n_j'\,(\varrho_K')_j}=\frac{1}{n_{j+1}\,(\varrho_K)_{j+1}}$$

ist, mit

$$\frac{1}{n_j'}-\frac{1}{n_j}=\triangle\left(\frac{1}{n}\right)_j \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{n_j\,s_j}-\frac{1}{n_j'\,s_j'}=-\triangle\left(\frac{1}{n\,s}\right)_j$$

die Beziehung:

$$\frac{1}{n_k'\,(\varrho_K')_k}-\frac{1}{n_1\,(\varrho_K)_1}=\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{1}{r_j}\triangle\left(\frac{1}{n}\right)_j-\left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q}-Q}\right)_j^2\triangle\left(\frac{1}{n\,s}\right)_j\right\}.$$

Damit einem ebenen Objekt $[(\varrho_K)_1 \to \infty]$ ein ebenes Bild $[(\varrho'_K)_k \to \infty]$ entspricht, muß

$$\sum_{j=1}^{k} \left\{ \frac{1}{r_j} \triangle \left(\frac{1}{n}\right)_j - \left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q} - Q}\right)_j^2 \triangle \left(\frac{1}{n\,s}\right)_j \right\} = 0 \qquad \text{(VIII 4,6)}$$

werden.

Nun verlangt die ZINKEN-SOMMERsche Bedingung (VIII 1,6) für die Aufhebung des Astigmatismus

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\mathring{Q}}{\mathring{Q} - Q}\right)_j^2 \triangle \left(\frac{1}{n\,s}\right)_j = 0,$$

so daß das Bild astigmatismusfrei *und* geebnet ist, *wenn außer* der ZINKEN-SOMMERschen Bedingungsgleichung *noch weiter* gilt:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{r_j} \triangle \left(\frac{1}{n}\right)_j = 0,$$

wenn also die PETZVAL-Bedingung (VIII 3,14) *erfüllt* ist.

IX. Die Farbfehler

1. Chromatische Aberration des paraxialen Bildortes und der Abbildung eines kleinen Objektes durch weitgeöffnete Strahlenbündel

Wir gehen wieder von der Invarianten (I 2, 1*) des paraxialen Strahlenganges aus[1]:

$$Q_j = n_j\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{s_j}\right) = n'_j\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{s'_j}\right).$$

Wie wir wissen, ändert n seinen Wert in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ. Damit wird natürlich auch Q_j eine Funktion von λ. Differenzieren wir daher Q_j partiell nach λ, so erhalten wir aus der obigen Gleichung:

$$\frac{\partial Q_j}{\partial \lambda} = \frac{Q_j}{n_j}\frac{\partial n_j}{\partial \lambda} + \frac{n_j}{s_j^2}\frac{\partial s_j}{\partial \lambda} = \frac{Q_j}{n'_j}\frac{\partial n'_j}{\partial \lambda} + \frac{n'_j}{s'^2_j}\frac{\partial s'_j}{\partial \lambda}.$$

Daraus erhalten wir:

$$\frac{n'_j}{s'^2_j}\frac{\partial s'_j}{\partial \lambda} = \frac{n_j}{s_j^2}\frac{\partial s_j}{\partial \lambda} - Q_j\left\{\frac{1}{n'_j}\frac{\partial n'_j}{\partial \lambda} - \frac{1}{n_j}\frac{\partial n_j}{\partial \lambda}\right\}. \qquad \text{(IX 1,1)}$$

Weiter wissen wir, daß folgende Beziehungen bestehen:

$$\frac{\partial s_j}{\partial \lambda} = \frac{\partial s'_{j-1}}{\partial \lambda},$$

da $s_j = s'_{j-1} - d'_{j-1}$ und d' von λ unabhängig ist, ferner

$$n_j(\lambda) = n'_{j-1}(\lambda) \qquad \text{und} \qquad \prod_{\mu=2}^{j}\frac{s_\mu}{s'_{\mu-1}} = \frac{t_j}{t_1}.$$

Wir wollen jetzt die für die verschiedenen Werte von $j (= 1, 2, \ldots, k)$ geltenden Gleichungen (IX 1, 1) zusammenfassen. Dazu nehmen wir noch folgende formale Veränderungen vor:

Für $j = 1$ bleibe die Gleichung unverändert.

Für $j = 2$ multiplizieren wir die Gleichung mit $\dfrac{s_2^2}{s_1'^2}$.

Für $j = 3$ multiplizieren wir die Gleichung mit $\dfrac{s_2^2 \cdot s_3^2}{s_1'^2 \cdot s_2'^2}$.

Für $j = 4$ multiplizieren wir die Gleichung mit $\dfrac{s_2^2 \cdot s_3^2 \cdot s_4^2}{s_1'^2\, s_2'^2\, s_3'^2}$
usw.

[1] Für ihn ist $t_j = t_j$.

Addieren wir die so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich schließlich unter Berücksichtigung der obigen Beziehungen

$$\left(\frac{t_k}{t_1}\right)^2 \frac{n_k'}{s_k'^2}\,\frac{\partial s_k'}{\partial \lambda} = \frac{n_1}{s_1^2}\,\frac{\partial s_1}{\partial \lambda} - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2 Q_j \Delta \left(\frac{1}{n_j}\,\frac{\partial n_j}{\partial \lambda}\right)$$

oder

$$\frac{\partial s_k'}{\partial \lambda} = \frac{s_k'^2}{n_k'} \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2 \left\{\frac{n_1}{s_1^2}\,\frac{\partial s_1}{\partial \lambda} - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2 Q_j \Delta \left(\frac{1}{n_j}\,\frac{\partial n_j}{\partial \lambda}\right)\right\}. \qquad \text{(IX 1,2)}$$

Für ein materielles Objekt ist $\frac{\partial s_1}{\partial \lambda} = 0$. Damit sich nun die Bilder eines materiellen, wirklichen Objektes für die verschiedenen Farben, die der der paraxialen Durchrechnung zugrunde gelegten Farbe benachbart sind, an der gleichen Stelle befinden, muß $\frac{\partial s_k'}{\partial \lambda} = 0$ und demnach

$$\frac{s_k'^2}{n_k'} \left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2 \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2 Q_j \Delta \left(\frac{1}{n_j}\,\frac{\partial n_j}{\partial \lambda}\right) = 0$$

sein oder einfacher

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2 Q_j \Delta \left(\frac{1}{n_j}\,\frac{\partial n_j}{\partial \lambda}\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2 Q_j \Delta \left(\frac{\partial \ln n_j}{\partial \lambda}\right) = 0\,. \qquad \text{(IX 1,3)}$$

Dabei sind also die Q_j und $\frac{t_j}{t_1}$ der Farbe λ, für die die Durchrechnung vorgenommen wurde, zu benutzen.

Wichtiger als die vorstehend betrachtete chromatische Korrektion des *Achsenpunktes* ist in vielen Fällen die chromatische Korrektion in den *Randgebieten*, so daß von der des Achsenpunktes oft abgewichen wird (s. u.).

Bezüglich der Farbkorrektion bei der Abbildung (kleiner Objekte) durch endlich geöffnete Strahlenbündel sind in der Praxis verschiedene Arten üblich:

a) $$\tilde{s}_{\lambda_1}' = \tilde{s}_{\lambda_2}' = s_\lambda' \quad \text{für} \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2\,.$$

Diese Art der Korrektion wird als „normale Achromasie“ bezeichnet.

b) $$\tilde{s}_{\lambda_1}' = \tilde{s}_{\lambda_2}' = s_{\lambda_1}' = s_{\lambda_2}'\,,$$

ergibt die sogenannte „GAUSS-Achromasie“.

c) $$\tilde{s}_{\lambda_1}' = \tilde{s}_{\lambda_2}' = s_{\lambda_1}' = s_{\lambda_2}' = s_{\lambda_3}' \quad \text{für} \quad \lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2\,.$$

Gleichzeitig soll bei dieser Farbkorrektion das System für λ_1 und λ_2 aplanatisch sein, d. h., es soll außerdem die sphärische Aberration behoben und die Sinusbedingung erfüllt sein. *Diese* Art der Achromasie nennt man „ABBE-Apochromasie“. Da die Aplanasie neben der Erfüllung der Sinusbedingung ja auch ideale Strahlenvereinigung für die betreffende Strahlenart voraussetzt — eine Forderung, die im allgemeinen nicht erfüllbar ist, so daß man sich auf die Erfüllung der Isoplanasie beschränken muß —, ist es besser, von „isoplanatisch-achromatischer Korrektion“ zu sprechen.

2. Die Achromasie der Vergrößerung

Wichtiger als die Achromasie des paraxialen Bildortes ist oft auch die Achromasie der Vergrößerung, also die Forderung $\frac{\partial \beta'_s}{\partial \lambda} = 0$. Dabei ist zu beachten, daß $\frac{\partial \beta'_s}{\partial \lambda} = 0$ allein für eine Achromasie der Vergrößerung nicht genügt, sondern es muß dann auch noch gleichzeitig $\frac{\partial s'_k}{\partial \lambda} = 0$ erfüllt sein; denn die Hauptstrahlen der beiden verschiedenfarbigen, einen außeraxialen Punkt abbildenden Strahlenbündel schneiden im allgemeinen nicht nur die optische Achse, sondern auch die achsensenkrechte Bildebene in etwas verschiedenen Punkten (und haben im allgemeinen auch verschiedene Richtung) (Abb. 58).

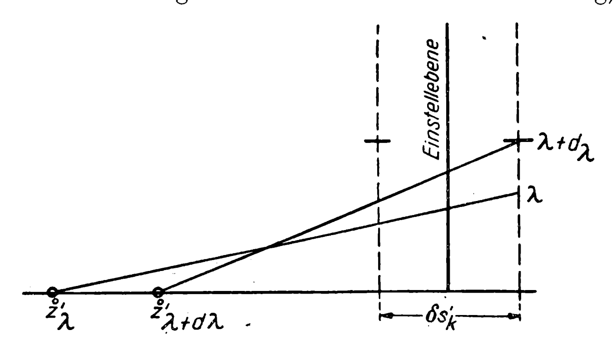


Abb. 58. Schematische Darstellung der Lagebeziehung zwischen $\mathring{z}'_\lambda$ und $\mathring{z}'_{\lambda+d\lambda}$ und der zu λ bzw. $\lambda + d\lambda$ gehörigen paraxialen Bildebenen.

Die Durchstoßungspunkte der zu den verschiedenen Objektpunkten gehörigen Hauptstrahlen mit einer achsensenkrechten Ebene ergeben aber — cum grano salis — das „Bild" des betreffenden Objektes. Man erhält daher bei Verwendung *nicht*monochromatischen Lichtes im allgemeinen Bilder mit Farbrändern.

Es muß also — falls $\frac{\partial s'_k}{\partial \lambda} \neq 0$ ist — auch $y'_\lambda \neq y'_{\lambda+d\lambda}$ sein, ferner muß $\mathring{z}'_\lambda = \mathring{z}'_{\lambda+d\lambda}$, also $\frac{\partial \mathring{z}'}{\partial \lambda} = 0$ sein, d. h., es muß das bildseitige Bild der Blende, die AP, chromatisch korrigiert sein (Abb. 59).

Außerdem muß die Isoplanasiebedingung für *beide* Farben (oder besser: für alle Farben) erfüllt sein.

Wir wollen bei unseren Überlegungen statt der Isoplanasiebedingung das vereinfachte Koinzidenzkriterium (VII 6,7) zugrunde legen:

$$\bar{s}'_k - s_1 \frac{\sin u_1}{\sin u'_k} = \text{const} \left(= \mathring{z}'_k\right) = s'_k - s_1 \frac{n'_k}{n_1} \beta'_s .$$

Gehen wir von der oben aufgestellten Forderung $\frac{\partial \mathring{z}_k'}{\partial \lambda} = 0$ aus, so erhalten wir aus der unterstrichenen Beziehung[1]

$$\frac{\partial \mathring{z}_k'}{\partial \lambda} = \frac{\partial s_k'}{\partial \lambda} - \frac{n_k'}{n_1} s_1 \beta_s' \left\{ \frac{1}{s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \lambda} + \frac{1}{n_k'} \frac{\partial n_k'}{\partial \lambda} - \frac{1}{n_1} \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} + \frac{1}{\beta_s'} \frac{\partial \beta_s'}{\partial \lambda} \right\}$$

$$= \frac{\partial s_k'}{\partial \lambda} - \frac{n_k'}{n_1} s_1 \beta_s' \left\{ \frac{\partial \ln s_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \ln n_k'}{\partial \lambda} - \frac{\partial \ln n_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \ln \beta_s'}{\partial \lambda} \right\}. \qquad \text{(IX 2,1)}$$

Nun ist nach (I 3,3)

$$\beta_s' = \frac{n_1}{n_k'} \prod_{j=1}^{k} \frac{s_j'}{s_j},$$

d. h.

$$\ln \beta_s' = \ln n_1 - \ln n_k' + \sum_{j=1}^{k} (\ln s_j' - \ln s_j).$$

Abb. 59. Erforderliche Lagebeziehung zwischen $\mathring{z}_\lambda, \mathring{z}_{\lambda+d\lambda}$, O_λ' und $O_{\lambda+d\lambda}'$ für Achromasie der Randpunkte des Gesichtsfeldes.

Damit wird also, da allgemein

$$\frac{d(\ln x)}{d\lambda} = \frac{1}{x} \frac{dx}{d\lambda}$$

ist:

$$\frac{\partial \ln \beta_s'}{\partial \lambda} = \frac{1}{\beta_s'} \frac{\partial \beta_s'}{\partial \lambda} = \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} - \frac{1}{n_k'} \frac{\partial n_k'}{\partial \lambda} + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{s_j'} \frac{\partial s_j'}{\partial \lambda} - \frac{1}{s_j} \frac{\partial s_j}{\partial \lambda} \right)$$

$$= \triangle \left(\frac{\partial \ln n}{\partial \lambda} \right) + \sum_{j=1}^{k} \triangle \left(\frac{\partial \ln s}{\partial \lambda} \right)_j .$$

Da

$$s_j = s_{j-1}' - d_{j-1}', \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial s_j}{\partial \lambda} = \frac{\partial s_{j-1}'}{\partial \lambda}$$

ist, erhalten wir

$$\frac{1}{\beta_s'} \frac{\partial \beta_s'}{\partial \lambda} - \frac{1}{n_1} \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} + \frac{1}{n_k'} \frac{\partial n_k'}{\partial \lambda} - \frac{1}{s_k'} \frac{\partial s_k'}{\partial \lambda} + \frac{1}{s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{s_j'} - \frac{1}{s_{j+1}} \right) \frac{\partial s_j'}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial \ln \beta_s'}{\partial \lambda} + \triangle \left(\frac{\partial \ln n}{\partial \lambda} \right) - \triangle \left(\frac{\partial \ln s}{\partial \lambda} \right) = \sum_{j=1}^{k-1} \triangle \left(\frac{\partial \ln s}{\partial \lambda} \right)_j . \qquad \text{(IX 2,2)}$$

Nun gilt bekanntlich folgende Beziehung:

$$\frac{s_{j+1}}{s_j'} = \frac{t_{j+1}}{t_j}, \qquad \text{d. h., es wird} \qquad \frac{1}{s_{j+1}} = \frac{t_j}{s_j' \cdot t_{j+1}} .$$

[1] Bei einem materiellen Objekt ist wieder $\frac{1}{s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \lambda} = \frac{\partial \ln s_1}{\partial \lambda} = 0$.

Damit nimmt die rechte Seite von (IX 2, 2) folgende Gestalt an:

$$\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{1}{s'_j}-\frac{1}{s_{j+1}}\right)\frac{\partial s'_j}{\partial\lambda}=\sum_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{t_j}{t_{j+1}}\right)\frac{1}{s'_j}\frac{\partial s'_j}{\partial\lambda}; \qquad \text{(IX 2,3)}$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}\triangle\left(\frac{\partial\ln s}{\partial\lambda}\right)_j=\sum_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{t_j}{t_{j+1}}\right)\frac{\partial\ln s'_j}{\partial\lambda}.$$

Setzen wir also für die geschweifte Klammer der rechten Seite von (IX 2,1) den hierfür aus (IX 2, 2) und (IX 2, 3) sich ergebenden Ausdruck ein, so erhalten wir für $\frac{\partial \mathring{z}'_k}{\partial\lambda}$ folgende Gleichung:

$$\frac{\partial \mathring{z}'_k}{\partial\lambda}=\frac{\partial s'_k}{\partial\lambda}-\frac{n'_k}{n_1}s_1\beta'_s\left\{\frac{1}{s'_k}\frac{\partial s'_k}{\partial\lambda}+\sum_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{t_j}{t_{j+1}}\right)\frac{1}{s'_j}\frac{\partial s'_j}{\partial\lambda}\right\}$$

$$=\frac{\partial s'_k}{\partial\lambda}-\frac{n'_k}{n_1}s_1\beta'_s\left\{\underline{\frac{\partial\ln s'_k}{\partial\lambda}}+\sum_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{t_j}{t_{j+1}}\right)\underline{\frac{\partial\ln s'_j}{\partial\lambda}}\right\}. \qquad \text{(IX 2,4)}$$

Dieser Ausdruck soll für die Achromasie der Bildgröße verschwinden. In ihm sind noch die unterstrichenen Glieder nach (IX 1, 2) zu ersetzen durch

$$\frac{\partial\ln s'_k}{\partial\lambda}=\frac{1}{s'_k}\frac{\partial s'_k}{\partial\lambda}=\frac{s'_k}{n'_k}\left(\frac{t_1}{t_k}\right)^2\left\{\frac{n_1}{s_1^2}\frac{\partial s_1}{\partial\lambda}-\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{t_j}{t_1}\right)^2 Q_j\triangle\left(\frac{1}{n_j}\frac{\partial n_j}{\partial\lambda}\right)\right\}$$

[dabei wird $\frac{n_1}{s_1^2}\frac{\partial s_1}{\partial\lambda}=0$ bei Achromasie des Objektortes] und außerdem *entsprechend*

$$\frac{\partial\ln s'_j}{\partial\lambda}=\frac{1}{s'_j}\frac{\partial s'_j}{\partial\lambda}=\frac{s'_j}{n'_j}\left(\frac{t_1}{t_j}\right)^2\left\{\frac{n_1}{s_1^2}\frac{\partial s_1}{\partial\lambda}-\sum_{l=1}^{j}\left(\frac{t_l}{t_1}\right)^2 Q_l\triangle\left(\frac{1}{n_l}\frac{\partial n_l}{\partial\lambda}\right)\right\}.$$

Die Bedingung (IX 2, 4) ist umständlich und ist wohl praktisch in dieser Form noch nicht angewendet worden.

Für $s_1=\infty$ ist in (IX 2, 4) $s_1\cdot\beta'_s=-\bar{f}$ zu setzen.

3. Die Abhängigkeit des Brechungsindex der einzelnen Glassorten von der Wellenlänge λ des verwendeten Lichtes und ihre Darstellung

In der rechnenden Optik muß man sich natürlich auf die Benutzung solcher Glassorten beschränken, die normaler Weise hergestellt werden bzw. herstellbar sind.

Diese Glassorten besitzen je nach ihren Bestandteilen für die verschiedenen Farben verschiedene Brechungsindizes, d. h., sie besitzen eine „Dispersion". Man findet in den Glaskatalogen für die einzelnen Glassorten die Brechungsindizes für bestimmte Spektrallinien angegeben, und zwar wie folgt:

$n \rightarrow$ wachsend

Farbe	Rot		Gelb		Grün	Blau			Violett
Zeichen	A'	C	D	d	e	F	g	G'	h
Element	Mitte der Doppellinie K	H	Mitte der Doppellinie Na	He	Hg	H	Hg	H	Hg
Wellenlänge in $m\mu$	768,2	656,3	589,3	587,6	546,1	486,1	435,8	434,0	404,7

Besonders charakteristisch sind:

die mittlere Brechung: n_d,

die mittlere Farbzerstreuung: $n_F - n_C$, bezeichnet durch $C \rightarrow F$,

die ABBEsche Zahl: $$\nu_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}. \qquad \text{(IX 3,1)}$$

Weiter sind im Katalog angegeben

die Teilzerstreuungen $A' \rightarrow C$; $C \rightarrow e$; $e \rightarrow F$; $F \rightarrow g$; $g \rightarrow h$,

d. h. die $\triangle_\lambda n$-Werte $n_C - n_A$; $n_e - n_C$; $n_F - n_e$; $n_g - n_F$; $n_h - n_g$

sowie deren Verhältnis zur mittleren Farbzerstreuung, also

$$\frac{n_C - n_{A'}}{n_F - n_C}; \quad \frac{n_e - n_C}{n_F - n_C}; \quad \frac{n_F - n_e}{n_F - n_C}; \quad \frac{n_g - n_F}{n_F - n_C}; \quad \frac{n_h - n_g}{n_F - n_C}.$$

Weiter ist wichtig, daß die Angaben dieser Werte im Katalog zwar auf fünf Dezimalen für die n bzw. für die n-Differenzen erfolgen mit einer Genauigkeit von

± 5 Einheiten der 5. Dezimalen für die n-Werte

± 2 Einheiten der 5. Dezimalen für die $\triangle_\lambda n$-Werte,

daß aber die tatsächlichen *Schmelzen* oft stark von jenen Werten abweichen, nämlich bis zu ± 1 Einheit der 3. Dezimalen, auch stärker.

Die ν_d-Werte, die etwa zwischen 20 und 70 liegen und auf 1 Dezimale genau angegeben sind, weichen bei den tatsächlichen Schmelzen bis zu 5 Einheiten der 1. Dezimalen von den Katalogwerten ab.

Für die endgültige rechnerische Bestimmung der Daten eines optischen Systems und seiner Farbkorrektionen ist es also unbedingt erforderlich, die n_λ- und $\triangle_\lambda n$-Werte der zur Verfügung stehenden Schmelzen der betreffenden Glassorten zu kennen und zu benutzen.

Bei Photoobjektiven benutzt man übrigens oft die Größe $\nu_F = \dfrac{n_F - 1}{n_{G'} - n_D}$, in älteren Arbeiten wird noch $\nu_D = \dfrac{n_D - 1}{n_{G'} - n_D}$ empfohlen, während z. Z. wohl am gebräuchlichsten $\nu_e = \dfrac{n_e - 1}{n_F - n_C}$ ist.

4. Die Aufhebung des chromatischen Fehlers für dünne Linsen

Eine Einzellinse läßt sich natürlich nicht achromatisieren, da für diese ja nur ein einziger Brechungsindex zur Verfügung steht.

Fragen wir nach der Bedingung für die Achromasie einer aus *zwei* dünnen Linsen — die sich in Kontakt befinden — bestehenden Linse, wie sie etwa bei einem Fernrohr zur Verwendung kommt. Hier handelt es sich, da das Bild in der Brennebene — oder doch ganz in der Nähe der Brennebene — liegt, um die Achromasie der Brennweite. Es ist nun bei in Kontakt befindlichen dünnen Linsen

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}. \qquad \text{(IX 4,1)}$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{f_j'} = (n_j - 1)\left(\frac{1}{r_{j_1}} - \frac{1}{r_{j_2}}\right). \qquad \text{(IX 4,2)}$$

Differenzieren wir nun (IX 4,2) nach λ, so erhalten wir

$$-\frac{1}{f_j'^2}\frac{\partial f_j'}{\partial \lambda} = \left(\frac{1}{r_{j_1}} - \frac{1}{r_{j_2}}\right)\frac{\partial n_j}{\partial \lambda} = \frac{1}{f_j'}\,\frac{\left(\frac{\partial n_j}{\partial \lambda}\right)}{n_j - 1}$$

oder

$$\frac{1}{f_j'}\frac{\partial f_j'}{\partial \lambda} = -\frac{1}{n_j - 1}\frac{\partial n_j}{\partial \lambda}, \quad \text{und somit} \quad \frac{\triangle_\lambda f_j'}{f_j'} = -\frac{\triangle_\lambda n_j}{n_j - 1} = -\frac{1}{\nu_j}. \qquad \text{(IX 4,3)}$$

Wir führen hier also die *Differenzen* an Stelle der Differentiale ein, da es sich bei den praktischen Anwendungen nicht nur um zwei eng benachbarte Wellenlängen handelt, für die Achromasie angestrebt wird, sondern um einen größeren Wellenlängenbereich, für den naturgemäß keine strenge Achromasie möglich ist, für den man sich daher — als Kompromiß — mit der Betrachtung endlicher Wellenlängendifferenzen begnügen muß, da $\dfrac{\partial n}{\partial \lambda}$ nicht konstant, n also nicht linear von λ abhängt.

Soll nun $\frac{1}{f'}$ der Doppellinse achromatisch sein, so ist nach (IX 4,1) zu fordern, daß

$$-\frac{1}{f'^2}\cdot\frac{\partial f'}{\partial\lambda} = -\left(\frac{1}{f_1'^2}\,\frac{\partial f_1'}{\partial\lambda} + \frac{1}{f_2'^2}\,\frac{\partial f_2'}{\partial\lambda}\right) = 0$$

ist, daß also

$$\frac{\triangle_\lambda f_1'}{f_1'^2} + \frac{\triangle_\lambda f_2'}{f_2'^2} = 0\,,$$

d. h.: da nach (IX 4,3) $\triangle_\lambda f_j' = -\frac{f_j'}{\nu_j}$ ist, ist *zu fordern, daß*

$$\frac{1}{f_1'\nu_1} + \frac{1}{f_2'\nu_2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad f_1' : f_2' = -\nu_2 : \nu_1\,. \qquad \text{(IX 4,4)}$$

Die eine der beiden Teillinsen muß also eine negative, die andere eine positive Brennweite besitzen, da ja ν_1 und ν_2 beide positiv sind. Da nun nach (IX 4,1) und (IX 4,4)

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} = \frac{1}{f_1'} - \frac{\nu_2}{\nu_1}\,\frac{1}{f_1'} = \frac{1}{f_1'}\cdot\frac{\nu_1-\nu_2}{\nu_1}$$

ist, so ergibt sich *als Forderung*

$$f_1' = \frac{\nu_1-\nu_2}{\nu_1}\,f'\,; \qquad f_2' = -\frac{\nu_1-\nu_2}{\nu_2}\,f' = \frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_2}\,f' \qquad \text{(IX 4,5)}$$

oder

$$f' = \frac{\nu_1}{\nu_1-\nu_2}\,f_1' = \frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1}\,f_2'\,. \qquad \text{(IX 4,5a)}$$

Ist nun $\nu_2 > \nu_1$, so ist $f_1' < 0$, $f_2' > 0$, d. h., zur Negativlinse gehört der *kleinere* ν-Wert, $f' > 0$ vorausgesetzt.

Die ABBEsche Zahl ν [s. (IX 3,1)] hat für die Flintgläser einen Wert zwischen 25 und 55, für die Krongläser zwischen 50 und 70. Man muß also eine *konkave Flint*glaslinse mit einer *konvexen Kron*glaslinse bei $f' > 0$ kombinieren und umgekehrt.

Mit der Bedingung (IX 4,4) steht übrigens die PETZVAL-Forderung (VIII 3,14) bei den gewöhnlichen Gläsern im Widerspruch; denn diese besagt bekanntlich, es soll

$$\sum \frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_j'}\right) = 0$$

sein. Angewandt auf eine Anzahl dünner Linsen, für die ja — mit l als „*Linsenindex*" — gilt

$$\frac{n_l-1}{n_l r_{l_1}} + \frac{1-n_l}{n_l r_{l_2}} = \frac{1}{n_l}\left(-\frac{1}{f_{l_1}} + \frac{1}{f_{l_2}'}\right) = \left(\frac{1}{n f'}\right)_l,$$

soll also $\sum \frac{1}{nf'} = 0$ sein, während die Achromasiebedingung dagegen verlangt $\sum \frac{1}{\nu f'} = 0\,.$

Bei 2 Linsen wäre also zu fordern — da

$$\frac{1}{n_1 f_1'} + \frac{1}{n_2 f_2'} = \frac{n_2 f_2' + n_1 f_1'}{n_1 n_2 f_1' f_2'}$$

ist —:

$$\left.\begin{aligned} n_1 f_1' + n_2 f_2' &= 0 \\ \nu_1 f_1' + \nu_2 f_2' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{d. h.} \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

und

Hiernach müßten die Flintgläser (mit kleinerem ν-Wert) auch den kleineren Brechungsindex haben, was bei den üblichen Glassorten früher keineswegs der Fall war, sondern erst seit den Forschungen von ABBE und SCHOTT — die es ermöglichten, auch derartige Glassorten herzustellen, die jener Forderung genügen — für bestimmte Glassorten zutrifft.

Fragen wir nun, ob es auch möglich ist, Achromasie mit zwei Linsen *gleicher* Glasart zu erreichen. Dazu wollen wir zwei dünne Linsen mit den Brennweiten f_1' und f_2' im Abstand d betrachten. Dann ist nach (II 4,2) und (II 1,4)

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{\delta}{f_1' f_2'} \qquad \text{mit} \qquad \delta = \frac{d}{n}$$

($= d$, falls sich — wie hier üblich — zwischen den beiden Linsen Luft befindet).

Wollen wir wieder Achromasie der Brennweite f' erhalten, so ist zu fordern

$$-\frac{df'}{f'^2} = -\frac{df_1'}{f_1'^2} - \frac{df_2'}{f_2'^2} + \frac{\delta \cdot df_1'}{f_1'^2 f_2'} + \frac{\delta \cdot df_2'}{f_1' f_2'^2} = 0.$$

Da nach (IX 4,3)

$$\frac{\triangle_\lambda f_j'}{f_j'} = -\frac{1}{\nu_j}$$

ist, so lautet die Bedingung für Achromasie (der Brennweite) eines aus zwei dünnen Linsen des Abstandes d bestehenden Linsensystems:

$$\frac{1}{\nu_1 f_1'} + \frac{1}{\nu_2 f_2'} - \frac{\delta}{f_1' f_2'} \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}\right) = 0. \qquad \text{(IX 4,6)}$$

Bei gleicher Glasart ist $\nu_1 = \nu_2$, also geht diese Bedingung über in

$$\frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{2\delta}{f_1' f_2'} = 0, \qquad \text{d. h.} \qquad \delta = \frac{1}{2}(f_1' + f_2').$$

Der Abstand beider (dünnen) Einzellinsen muß also gleich der halben Summe der Brennweiten beider Linsen sein.

Diese Beziehung benutzt man z. B. bei Okularen. Sie sind dann achromatisiert bezüglich der Brenn*weite*, nicht aber bezüglich der Lage der *Brennpunkte* und *Haupt*punkte, also bezüglich der Vergrößerung.

X. Über Einzellinsen, Äquivalentlinsen und Systeme von Äquivalentlinsen

Für eine Einzellinse haben wir die Formeln der Kardinalelemente bereits früher kennengelernt. Es gilt nach (II 4, 2)

$$D = D_1 + D_2 - \delta\, D_1 D_2\,,$$

mit

$$D_{1,2} = \left(\frac{n'-n}{r}\right)_{1,2}; \qquad \delta = \frac{d_{12}}{n_{12}} = \frac{d_1'}{n_1'} = \frac{d}{n_1'}\,.$$

Ist $n_1 = n_2' = 1$ (d. h.: haben wir eine einfache Linse in Luft) und ist $n_1' = n_2 = n$, so ist

$$-\frac{1}{\bar{f}} = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)^2}{n}\frac{d}{r_1 r_2} \qquad (X,1)$$

Ferner gilt mit $\overrightarrow{S_1H} = h$; $\overrightarrow{S_2H'} = h'$

$$\left.\begin{aligned} h' &= -\delta\frac{D_1}{D}\,, \\ h &= +\delta\frac{D_2}{D}\,, \end{aligned}\right| \quad \begin{matrix}\text{speziell für} \\ n_1 = n_2' = 1 \\ n_1' = n_2 = n\end{matrix} \quad \left|\begin{aligned} h' &= +\bar{f}\frac{n-1}{n}\frac{d}{r_1}\left(=\overrightarrow{S_2K'}\right) \\ h &= +\bar{f}\,\frac{n-1}{n}\frac{d}{r_2}\left(=\overrightarrow{S_1K}\right)\end{aligned}\right.$$

$$\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{HS_1} + \overrightarrow{S_1S_2} + \overrightarrow{S_2H'} = d_1' - \delta\frac{D_1 + D_2}{D}\,,$$

also für eine in Luft befindliche Einzellinse wieder speziell (s. o.)

$$\overrightarrow{HH'} = d - \frac{d}{n}\left(1 + \frac{(n-1)^2}{n}\frac{d}{r_1 r_2}\bar{f}\right) = \frac{n-1}{n}d + \frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{d^2}{r_1 r_2}f'$$

$$= \frac{n-1}{n}d\cdot\left\{1 + \frac{n-1}{n}\frac{f'd}{r_1 r_2}\right\};\quad \bar{f} = -f'\,.$$

Endlich erhalten wir mit

$$\overrightarrow{S_2F'} = (s')_{s\to\infty} = s'_\infty\,,\quad \overrightarrow{S_1F} = (s)_{s'\to\infty} = s_\infty \quad \text{und} \quad \overrightarrow{S_2H'} = h'$$

$$s'_\infty = \overrightarrow{S_2H'} + \overrightarrow{H'F'} = h' + f' = -\frac{\delta D_1}{D} + \frac{n_2'}{D}\,,$$

für den genannten Spezialfall (s. o.) also:

$$s'_\infty = -\bar{f}\left(1 - \frac{n-1}{n}\frac{d}{r_1}\right).$$

Ferner:

$$s_\infty = \overrightarrow{S_1H} + \overrightarrow{HF} = h + \bar{f} = \frac{\delta D_2}{D} - \frac{n_1}{D}\,,$$

für den Spezialfall (s. o.) also: $s_\infty = +\bar{f}\left(1 + \frac{n-1}{n}\frac{d}{r_2}\right)$.

Für Überschlagsrechnungen und erste Entwurfsrechnungen optischer Systeme arbeitet man nun oft mit sogenannten „unendlich dünnen" Linsen. Um aber dabei doch wenigstens die richtigen Strahl*richtungen* zu erhalten, werden diese unendlich dünnen Linsen zweckentsprechend gewählt, d. h., *man ersetzt die wirklichen* Linsen durch ihnen *äquivalente* Linsen, durch *„Äquivalentlinsen"*.

Diese Äquivalentlinsen sind folgendermaßen definiert:

Jede Linse wird als unendlich dünn betrachtet, sie erhält dabei *andere Radien als* die *wirkliche* Linse, aber *gleichen Brechungsindex* und wird *an die Stelle* der *objekt*seitigen *Hauptebene* der *wirklichen* Linse gesetzt. An dieser

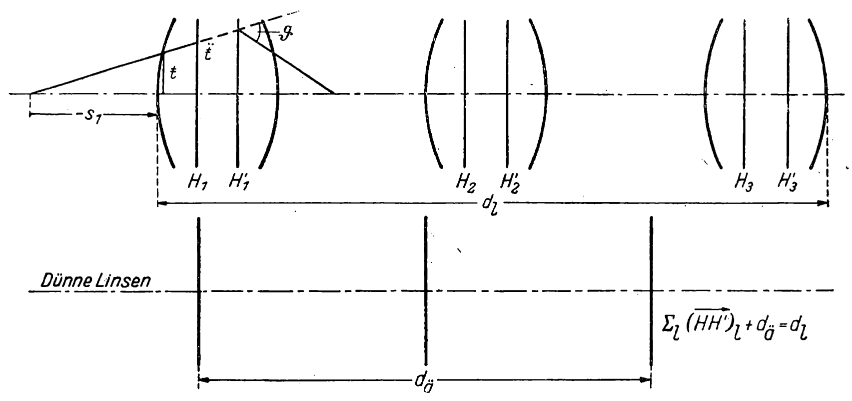


Abb. 60. Zur Bestimmung des Abstandes der Äquivalentlinsen und der Gesamtlänge des „Äquivalentlinsensystems".

Stelle denkt man sich dann *beide* Hauptebenen zusammenfallend, so daß die *Gesamtlänge* eines optischen Systems auf diese Weise *um die Summe aller* $(\overrightarrow{HH'})_l$ der Einzellinsen *verringert* erscheint. Jede Äquivalentlinse wird als in Luft stehend angenommen.

Für die Äquivalentlinse bezeichnen wir alle Größen — wenigstens soweit sie gegenüber denen der wirklichen Linsen sich geändert haben — durch zwei darüber gesetzte Punkte[1], um dadurch an das *„Ä"* der Äquivalentlinse zu erinnern.

Es ist also

$$\ddot{s}_l = s_l - h_l\,, \quad \text{da} \quad \ddot{s}_l = \overrightarrow{H_l O_l} = \overrightarrow{H_l S_l} + \overrightarrow{S_l O_l}\,, \qquad \text{(X,2)}$$

ferner[2]

$$\ddot{t}_l = \frac{\ddot{s}_l}{s_l}\, t_l \qquad \text{(vgl. Abb. 60).} \qquad \text{(X,3)}$$

---

[1] Da wir es mit zeitlichen Differentiationen in der geometrischen Optik nicht zu tun haben, ist hier keine Verwechslung mit der zweiten Ableitung nach der Zeit, die sonst durch ¨ angedeutet wird, zu befürchten.

[2] Auch für diese Betrachtungen ist wieder $\ddot{t}$ mit t gleichwertig.

Da die Strahlneigungen erhalten bleiben sollen — wir müssen die $\ddot{r}_{l_1}$ und $\ddot{r}_{l_2}$ entsprechend wählen —, so sind für diese *Strahlneigungen* bei den Äquivalentlinsen *keine* „$\cdot\cdot$" erforderlich. Die Strahlablenkung ϑ_j an der j-ten Fläche ($j = l_1$ bzw. l_2) ist dann

$$\vartheta_j = u_j' - u_j = \frac{t_j}{s_j'} - \frac{t_j}{s_j} = t_j\left(\frac{1}{s_j'} - \frac{1}{s_j}\right).$$

Weiter läßt sich unter Beachtung von (I 2, 1*) ausdrücken

$$\frac{1}{s_j'} = \frac{1}{r_j} - \frac{Q_j}{n_j'} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{s_j} = \frac{1}{r_j} - \frac{Q_j}{n_j}.$$

Danach erhalten wir

$$\vartheta_j = -t_j Q_j\left(\frac{1}{n_j'} - \frac{1}{n_j}\right) = -t_j Q_j \Delta\left(\frac{1}{n}\right)_j. \tag{X, 4}$$

Soll nun $\ddot{\vartheta}_j = \vartheta_j$ sein, so muß — da die „n" unverändert bleiben — gelten

$$\ddot{t}_j \ddot{Q}_j = t_j Q_j, \tag{X, 5}$$

also

$$\ddot{t}_j\left(\frac{1}{\ddot{r}_j} - \frac{1}{\ddot{s}_j}\right) = t_j\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{s_j}\right).$$

Nun war nach (X, 2) und (X, 3)

$$\ddot{s}_j = \ddot{s}_l = s_l - h_l = s_j - h_l,$$

$$\ddot{t}_j = \ddot{t}_l = \frac{\ddot{s}_l}{s_l} t_l = \frac{\ddot{s}_j}{s_j} t_j,$$

und es wird

$$\frac{1}{\ddot{r}_j} = \frac{s_j}{\ddot{s}_j}\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{s_j}\right) + \frac{1}{\ddot{s}_j} = \frac{1}{r_j}\frac{s_j}{\ddot{s}_j} = \frac{1}{r_j}\cdot\frac{1}{1 - \frac{h_l}{s_j}},$$

d. h.

$$\boxed{\ddot{r}_{l_1} = r_{l_1}\left(1 - \frac{h_l}{s_l}\right)}. \tag{X, 6}$$

Entsprechend ergibt sich

$$\boxed{\ddot{r}_{l_2} = r_{l_2}\left(1 - \frac{h_l'}{s_l'}\right)}. \tag{X, 7}$$

In der Praxis liegt meist die umgekehrte Fragestellung vor. Beim Entwurf eines optischen Systems wird zunächst mit unendlich dünnen Linsen gearbeitet. Diese sind dann unter Berücksichtigung der erforderlichen Linsendicken in wirkliche Linsen umzurechnen. Dabei genügt es fast immer, die h_l, h_l' mit den neuen Dicken, aber den Radien der Äquivalentlinsen zu berechnen. Mit diesen kann man dann die s_l, s_l' und sodann die r_{l_1} und r_{l_2} berechnen. Anschließend ist jede der neuen Linsen um soviel von der vorhergehenden Linse weg zu verrücken, wie es dem Abstand der beiden Hauptebenen der vorliegenden Linse entspricht.

XI. Bestimmung der „optischen Wegdifferenzen" — gemessen in Wellenlängen —, die die „Zonenstrahlen" gegen den Hauptstrahl des bildseitigen Strahlenbündels in einem Punkte der paraxialen Bildebene oder einer zu ihr parallelen Einstellebene besitzen

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir uns ausschließlich mit den geometrisch-optischen Gesetzen und Beziehungen beschäftigt. Nun wissen wir aber, daß das Licht eine Wellenbewegung, und zwar eine elektromagnetische Wellenbewegung ist, und daß es *wesentlich darauf ankommt*, daß die verschiedenen „Lichtstrahlen", die zur Bilderzeugung eines Punktes beitragen, sich in dem betreffenden Bildpunkte mit gleicher Phase treffen, oder — genauer gesagt — *daß die* den einzelnen Strahlen *zugeordneten*, durch sie gewissermaßen repräsentierten (ebenen) *Wellen* durch den Bildpunkt *mit gleicher Phase hindurchgehen*, damit sich diese Wellen nicht mehr oder weniger stark gegenseitig aufheben. Tatsächlich läßt sich dies praktisch so gut wie nie erreichen. Nach RAYLEIGH ist es aber für eine brauchbare Abbildung erforderlich, daß sich die Lichtwege der verschiedenen Strahlen bzw. der durch sie repräsentierten Wellen über die ganze Öffnung des abbildenden Systems um nicht mehr als $\frac{\lambda}{4}$ unterscheiden.

Man kann diese sehr allgemeine und mehr empirische Angabe strenger fassen[1], doch wollen wir hier nicht näher darauf eingehen. Wohl aber erscheint es notwendig, die Formeln zur Berechnung der Lichtwegunterschiede der einzelnen, die Abbildung bewirkenden Strahlen selbst hier kurz zu betrachten, wobei wir uns auf die Strahlen beschränken, die in der Meridianebene des Hauptstrahles des abbildenden Strahlenbündels liegen.

1. Methode: Benutzung des HUYGENSschen Prinzips

Von einem *außeraxialen* Objektpunkt P gehe ein Strahlenbündel aus, von dem bildseitig der Hauptstrahl $\overrightarrow{HQ_iP'_H}$ und z. B. ein Zonenstrahl $\overrightarrow{Z_iQ_iP'_{Z_i}}$ berechnet und in der Figur (Abb. 61) skizziert dargestellt sei. Sie mögen sich in Q_i schneiden.

Nach dem HUYGENSschen Prinzip können Z_i und H, die Schnittpunkte dieser beiden Strahlen mit der letzten Fläche des abbildenden Systems, als Aus-

[1] Siehe J. PICHT, Optische Abbildung, Einführung in die Wellen- und Beugungstheorie optischer Systeme (S. 177, 178, 183, 191, 203, 232). Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1931.

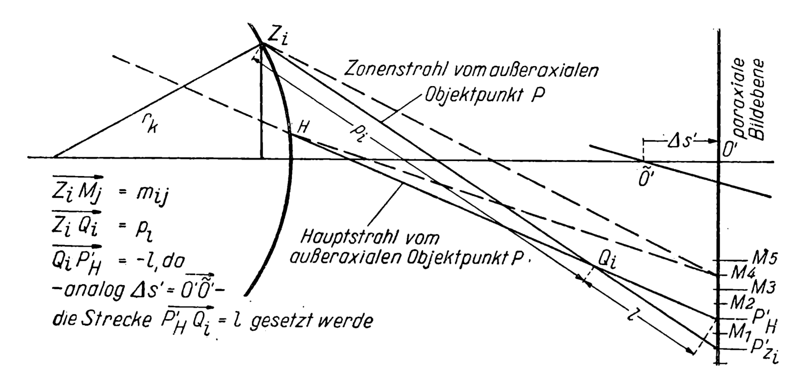


Abb. 61. Zur Berechnung der Lichtweglängen und der Phasen der den aberrationsbehafteten Lichtstrahlen zugeordneten HUYGENSschen Elementarwellen in verschiedenen Punkten der (paraxialen) Bildebene.

gangspunkte je einer Kugelwelle betrachtet werden. Um Einsicht in die Intensitätsverhältnisse in der paraxialen Bildebene zu gewinnen, sollen für bestimmte Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 dieser Ebene die von Z_i und H herrührenden Einflüsse berechnet werden. Sind P'_{Z_i} und P'_H die Schnittpunkte der beiden Strahlen mit der *paraxialen* Bildebene, und ist $\overrightarrow{P'_{Z_i} P'_H} = q$ die *Quer*aberration, so seien — willkürlich — in dieser Ebene mehrere Punkte M_v (mit $v = 1, 2, 3, \ldots$) etwa so gewählt, daß $P'_Z M_1 = M_1 P'_H = P'_H M_2 = M_2 M_3 = M_3 M_4 = \cdots = \frac{q}{2}$. Im Schnittpunkt Q_i der beiden Strahlen $\overrightarrow{Z_i Q_i P'_{Z_i}}$ und $\overrightarrow{H Q_i P'_H}$ besitzen die beiden Strahlen einen angebbaren Lichtwegunterschied

$$\triangle w_{Z|H} = w_{PZQ} - w_{PHQ} = (\overline{PZ_iQ_i} - \overline{PHQ_i})\,.$$

Bezeichnet $\triangle l'$ den Abstand des Punktes Q_i von dem Punkt, in dem der Hauptstrahl von einem ihm unmittelbar benachbarten, gleichfalls von P ausgehenden Strahl geschnitten wird, ferner $\varkappa'$ den Winkel des Strahls PZ_iQ_i gegen den Hauptstrahl PHQ_i und wird $\triangle l'$ in Abhängigkeit von $\varkappa'$ dargestellt durch die (im allgemeinen endliche) — stets mögliche und angebbare — Potenzreihe

$$\triangle l' = a_1 \operatorname{tg} \varkappa' + a_2 \operatorname{tg}^2 \varkappa' + a_3 \operatorname{tg}^3 \varkappa' + \cdots,$$

so gilt für $\triangle w_{Z|H}$ die Beziehung[1]

$$\triangle w_{Z|H} = \left(\frac{1}{\cos \varkappa'} - 1\right)(2 B_2 + \triangle l') - \frac{\operatorname{tg}^2 \varkappa'}{\cos \varkappa'}(B_2 + B_4 \operatorname{tg}^2 \varkappa' + B_6 \operatorname{tg}^4 \varkappa' + \cdots)$$
$$- \frac{\operatorname{tg} \varkappa'}{\cos \varkappa'}(B_1 + B_3 \operatorname{tg}^2 \varkappa' + B_5 \operatorname{tg}^4 \varkappa' + \cdots) + B_1 \cdot \operatorname{Ar\,Sin}(\operatorname{tg} \varkappa')\,.$$

[1] J. PICHT, Zur Frage der optischen Lichtweg-Längen zweier Strahlen zwischen Objektpunkt und bildseitigem Schnittpunkt beider Strahlen. Erscheint demnächst in der Zeitschrift „Optica Acta“, z. Z. (Dez. 1955) im Druck.

Hierin ist:

$$B_2 = a_2 - \frac{4}{3} B_4 \qquad B_1 = a_1 - \frac{3}{2} B_3$$

$$B_4 = a_4 - \frac{6}{5} B_6 \qquad B_3 = a_3 - \frac{5}{4} B_5$$

$$B_6 = a_6 - \frac{8}{7} B_8 \qquad B_5 = a_5 - \frac{7}{6} B_7$$

$$B_8 = a_8 - \frac{10}{9} B_{10} \qquad B_7 = a_7 - \frac{9}{8} B_9$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . .

wobei die Rekursionsformeln (bei endlicher Reihe von $\triangle l'$) automatisch abbrechen.

Bis zu Q_i möge die Anzahl der auf dem Hauptstrahl — vom Objektpunkt aus gerechnet — liegenden Wellenlängen gleich x sein, wobei die „Wellenlängen“ selbst natürlich in den verschiedenen optischen Medien verschiedene Größe besitzen und diejenigen Werte der Wellenlängen gemeint sind, die der für die Berechnung des Strahlverlaufs benutzten Spektrallinie entsprechen.

Davon sind — um für die *von H ausgehende* Elementarwelle die Länge w_H des bis M_j zurückgelegten Weges zu erhalten — *abzuziehen* die auf die Strecke Q_iH entfallenden Wellenlängen und *hinzuzufügen* die auf die Strecke HM_j entfallenden Wellenlängen. *Für den Zonenstrahl* gilt für die Länge w_Z des bis M_j zurückgelegten Weges entsprechend: $x\lambda + \triangle w_{Z|H}$ bis Punkt Q_i, zu vermindern um die Anzahl der Wellenlängen auf Q_iZ_i, zu vermehren um die Anzahl der Wellenlängen auf Z_iM_j. Die Differenz $\frac{1}{\lambda}(w_Z - w_H)$ dieser beiden *Wellenanzahlen* erlaubt ein Urteil über die Intensitätsverteilung.

Nun ist

$$\frac{1}{\lambda}(w_Z - w_H)_{M_j} = \frac{1}{\lambda}\triangle w_{|H} + \left(x - \frac{\overrightarrow{ZQ}}{\lambda} + \frac{\overrightarrow{ZM_j}}{\lambda}\right) - \left(x - \frac{\overrightarrow{HQ}}{\lambda} + \frac{\overrightarrow{HM_j}}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\triangle w_{Z|H} + \frac{\overrightarrow{ZM_j}}{\lambda} - \frac{\overrightarrow{ZQ}}{\lambda} - \left(\frac{\overrightarrow{HM_j}}{\lambda} - \frac{\overrightarrow{HQ}}{\lambda}\right)$$

$$= (w_Z - w_H)_{M_j} = \triangle w_{Z|H} + [m_{ij} - p_i - (\overrightarrow{HM_j} - \overrightarrow{HQ_i})], \qquad \text{(XI 1,1)}$$

also wo

$$m_{ij} = \overrightarrow{Z_iM_j}, \qquad p_i = \overrightarrow{Z_iQ_i}$$

ist.

Entsprechend werden diese Größen für (etwa drei oder mehr) weitere Zonenstrahlen ($i = 1, 2, 3, 4$) berechnet in bezug auf den *gleichen* Punkt M_j ($= M_1$) der paraxialen Bildebene. Ferner werden diese Berechnungen für etwa je drei odei mehr weitere Punkte M_2; M_3; M_4 durchgeführt.

Zeichnet man nunmehr — wie in der Abb. 62 geschehen — für verschiedene von einem außeraxialen Objektpunkt ausgehende Öffnungsstrahlen die den verschiedenen Punkten M_j der paraxialen Bildebene entsprechenden optischen Wegdifferenzen gegen den Hauptstrahl auf, so kann man aus dieser Zeichnung die Werte der entsprechenden optischen Wegdifferenzen für andere Punkte M

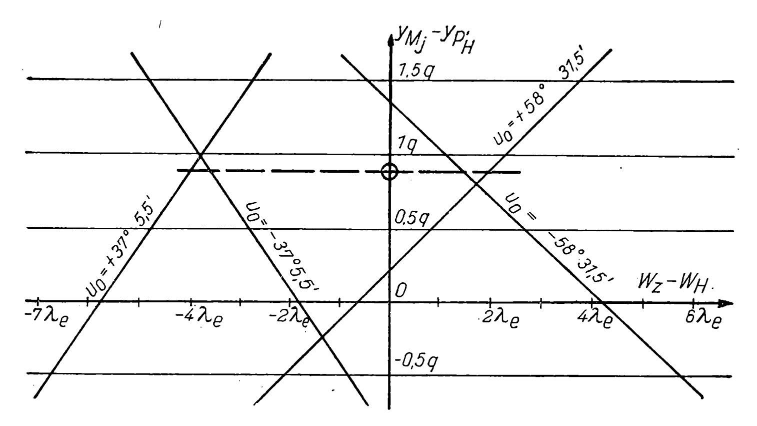


Abb. 62. Lichtunterschiede (gemessen in λ der e-Linie) der zu verschiedenen, vom gleichen außeraxialen Objektpunkt ausgehenden Lichtstrahlen verschiedenen u_0-Wertes gehörigen HUYGENSschen Kugelwellen, die vom Treffpunkt der betreffenden Strahlen mit der letzten Fläche eines speziellen — nicht ausgeführten — Mikroskopobjektivs ausgehen, in der paraxialen Bildebene. Der (scheinbar) geradlinige Verlauf der Kurven $u_0 = \text{const}$ ist nur bedingt durch die sehr geringe Abweichung von der Geradlinigkeit innerhalb des interessierenden, verhältnismäßig kleinen Bereiches in der Umgebung des Schnittpunktes des betreffenden Haupstrahles mit der paraxialen Bildebene.

der paraxialen Bildebene entnehmen und für diese anderen Punkte M — ebenso wie für die ursprünglichen Punkte M_j — den Verlauf der optischen Wegdifferenzen als Funktion der (objektseitigen) Neigung der Öffnungsstrahlen zeichnen (s. Abb. 63). Durch Umzeichnung kann man natürlich auch den funktionalen Zusammenhang der optischen Wegdifferenzen mit der *bildseitigen* Neigung der Zonenstrahlen gegen den Hauptstrahl erhalten. Nach der RAYLEIGHschen Forderung sollen — wie schon gesagt — diese Wegdifferenzen über den ganzen Bereich des Bündels nicht größer als etwa $\frac{1}{4}\lambda$ sein — eine Forderung, die sich allerdings z. B. bei Mikroskopobjektiven kaum oder doch nur schwer wird erfüllen lassen.

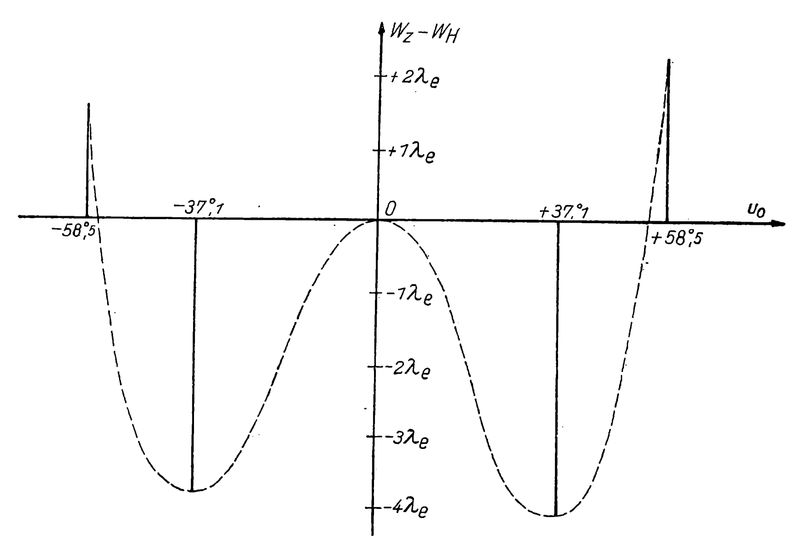


Abb. 63. Lichtwegunterschiede $w_Z - w_H$ (gemessen in λ der e-Linie) der Meridianstrahlen (Komastrahlen) gegen den zugehörigen Hauptstrahl des abt bildenden Strahlenbündels in dem in Abb. 62 durch ⊕ gegebenen Punk- $y_M = y_{P'_H} + 0{,}9 \cdot q$ (mit $q = 0{,}123$ mm im berechneten Strahlenbündel).

Achsenabstand des zugehörigen Objektpunktes war $+ 0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ mm; Apertur des (nicht ausgeführten) Mikroskopobjektives = 1,3; Vergrößerung $\beta' = 100$. Die Phasendifferenzen $\Delta\Phi$ der „Zonenstrahl-Wellen“ gegen die „Hauptstrahl-Welle“ ergeben sich aus

$$\frac{w_Z - w_H}{\lambda}.$$

2. Methode: Benutzung von Folgerungen aus der vom Verfasser angegebenen Integraldarstellung beliebig deformierter (optischer) Wellen[1]

Die Benutzung des HUYGENSschen Prinzips ist nicht nur umständlicher als die hier zu entwickelnde 2. Methode, sondern führt auch zu *verschiedenen* Werten der optischen Wegdifferenzen, je nachdem, welche — an sich ja nach HUYGENS beliebig wählbare — Fläche man als Ausgangsfläche der HUYGENSschen Wellen wählt.

Nach der vom Verf. abgeleiteten Integralbeziehung für die Intensitätsverteilung beliebiger Strahlenbündel endlicher Öffnung, also von Strahlenbündeln mit beliebig deformierten Wellenflächen, ist ein solches Strahlenbündel darstellbar durch Überlagerung *ebener* Wellen der verschiedenen

[1] J. PICHT, Optische Abbildung . . ., § 44; siehe auch J. PICHT, Ann. d. Phys. (4) 77, 685 (785), 1925 (§ 3). — Die vom Verf. angegebenen Integraldarstellungen gehen für *Kugel*wellen in eine — nur für *diese* geltende — von P. DEBYE, Ann. d. Phys. (4) 30, 755, 1909 angegebene Darstellung über.

Richtungen innerhalb des Öffnungswinkels, verschiedener Amplituden und verschiedener Phasen (sowie im allgemeinen verschiedener Polarisation). Hierbei sind die Lichtstrahlen des Strahlenbündels die Normalen der verschiedenen zu überlagernden ebenen Wellen. Die (relativen) Phasen der einzelnen ebenen Wellen sind durch die optischen Wegdifferenzen gegeben. [Die Amplitudenunterschiede der sich überlagernden ebenen Wellen, die von der Absorption des Lichtes in den einzelnen Medien und den Reflexionsverlusten an den einzelnen brechenden Flächen sowie außerdem von dem Verhältnis $\frac{du'_k}{du_1}$ abhängen und die Intensitätsverteilung im Bilde natürlich gleichfalls beeinflussen, mögen hier in erster Näherung unberücksichtigt bleiben.]

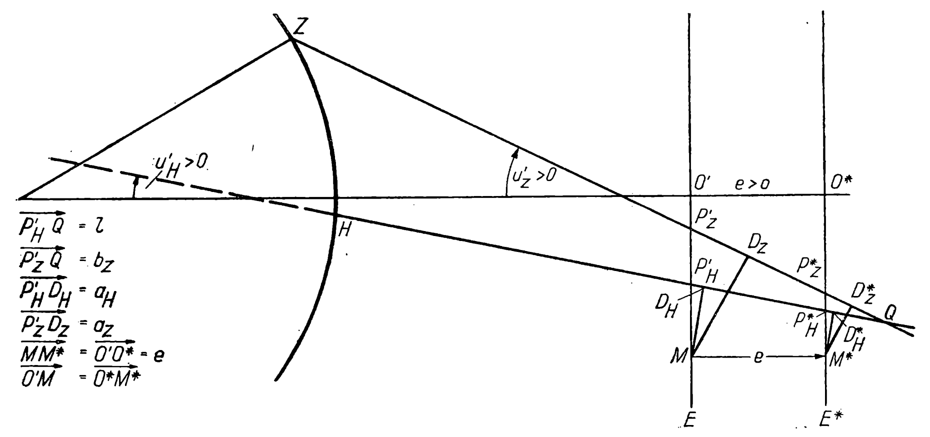


Abb. 64. Zur Berechnung der Lichtweglängen und der Phasen der den aberrationsbehafteten Lichtstrahlen eines Strahlenbündels nach der DEBYE-PICHTschen Formel zugeordneten ebenen Elementarwellen.

a) Um die den ebenen Wellen verschiedener Richtung entsprechenden Phasen (relativ zu der des zugehörigen Hauptstrahls) in einem beliebigen, in der Meridianebene des Haupt- (und des Zonen-) Strahls gelegenen Punkte M der *paraxialen Bildebene* zu bestimmen, fällen wir von M die Lote MD_Z bzw. MD_H auf den bildseitigen Zonenstrahl und den bildseitigen Hauptstrahl, wo D_Z bzw. D_H die Fußpunkte der Lote bezeichnen. Dann gilt (Abb. 64), da ja wieder $\overline{PZ_iQ_i} = \overline{PHQ_i} + \triangle w_{Z|H} = x \cdot \lambda + \triangle w_{Z|H}$ ist:

$$(w_Z)_M = \overrightarrow{PZQ} + \overrightarrow{QP'_Z} + \overrightarrow{P'_Z D_Z} = x\lambda + \triangle w_{Z|H} - b_Z + a_Z$$

$$= x\lambda + \triangle w_{Z|H} - \frac{(y'_Z - y'_H)\cos u'_H}{\sin(u'_Z - u'_H)} + (y'_Z - y'_M)\sin u'_Z\,,$$

$$(w_H)_M = \overrightarrow{PHQ} + \overrightarrow{QP'_H} + \overrightarrow{P'_H D_M} = x\lambda - l + a_H$$

$$= x\lambda - \frac{(y'_Z - y'_H)\cos u'_Z}{\sin(u'_Z - u'_H)} + (y'_H - y'_M)\sin u'_H\,,$$

so daß

$$(w_Z - w_H)_M = \triangle w_{Z|H} + \frac{(y'_Z - y'_H)(\cos u'_Z - \cos u'_H)}{\sin(u'_Z - u'_H)} + \\ + (y'_Z - y'_M)\sin u'_Z - (y'_H - y'_M)\cdot \sin u'_H \\ = \triangle w_{Z|H} + l - b_Z + a_Z - a_H \,. \qquad \text{(XI 2,1)}$$

b) Fällt der *Hauptstrahl* des Strahlenbündels mit der *Achse* des abbildenden Systems zusammen, haben wir es also *mit sphärischer Aberration* zu tun, so ist $u'_H = 0$ und $y_H = 0$, so daß wir hier erhalten

$$(w_Z - w_H)_M = \triangle w_{Z|H} + \triangle s' - b_Z + a_Z - a_H \\ = \triangle s' + \triangle w_{Z|H} - \frac{y'_Z}{\sin u'_Z} + (y'_Z - y'_M)\sin u'_Z \qquad \text{(XI 2,2)}$$

mit

$$\triangle s' = \frac{y_Z}{\operatorname{tg} u'_Z}\,.$$

$\triangle s'$ ist stets darstellbar als (im allgemeinen endliche) Potenzreihe von $\operatorname{tg}^2 u'_Z$ $(= \operatorname{tg}^2 u')$, also durch

$$\triangle s' = a \operatorname{tg}^2 u' + b \operatorname{tg}^4 u' + c \operatorname{tg}^6 u' + \cdots.$$

Für $\triangle w_{Z|H}$ gilt jetzt — bei sphärischer Aberration —

$$\triangle w_{Z|H} = -2a' - \triangle s' + \frac{1}{\cos u'}\left(2a' + \frac{4}{3} b' \operatorname{tg}^2 u' + \frac{6}{5} c' \operatorname{tg}^4 u' + \cdots\right) \\ = \left(\frac{1}{\cos u'} - 1\right)(2a' + \triangle s') - \frac{\operatorname{tg}^2 u'}{\cos u'}(a' + b' \operatorname{tg}^2 u' + c' \operatorname{tg}^4 u' + \cdots)\,.$$

mit

$$a' = a - \frac{4}{3} b'$$

$$b' = b - \frac{6}{5} c'$$

$$c' = c - \frac{8}{7} d'$$

$$d' = d - \frac{10}{9} e'$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

c) Fragen wir weiter nach den optischen Wegdifferenzen der den Strahlen entsprechenden ebenen Wellen im Punkte M^* (gleicher y-Koordinate) *einer zur paraxialen Ebene im Abstand e parallelen Ebene*, so erhalten wir hierfür:

$$(w_Z)_{M^*} = (w_Z)_M + e \cdot \cos u'_Z\,,$$

$$(w_H)_{M^*} = (w_H)_M + e \cdot \cos u'_H\,.$$

Es gilt also

$$(w_Z - w_H)_{M^*} = (w_Z - w_H)_M - e\,(\cos u'_H - \cos u'_Z) \qquad \text{(XI 2,3)}$$

für die einem *außeraxialen Objektpunkt* zugehörigen Strahlen der Meridianebene (Komastrahlen). Für Strahlen, die von einem *auf der Achse* gelegenen Punkt des Objektes ausgegangen sind, ergibt sich entsprechend:

$$(w_Z - w_H)_{M^*} = (w_Z - w_H)_M - e\,(1 - \cos u'_Z)\,, \qquad \text{(XI 2,3a)}$$

wo also $(w_Z - w_H)_M$ für den gleichen Achsenabstand y_M eines Punkets M der paraxialen Bildebene E zu nehmen ist, den der Punkt M^* in der zur paraxialen Bildebene parallelen Ebene E^* besitzt, für den der optische Wegunterschied $(w_Z - w_H)_M$ berechnet werden soll.

Die Lichtwegdifferenz, die die dem Zonenstrahl sowie dem Hauptstrahl zugeordneten ebenen Wellen im Punkte M^* der um e gegen die paraxiale Bildebene E verschobene achsensenkrechten Ebene E^* besitzen, läßt sich natürlich auch aus der zu (XI 2,1) analogen Formel

$$(w_Z - w_H)_{M^*} = \triangle w_{Z|H} + (y_Z^* - y_H^*)\,\frac{\cos u'_Z - \cos u'_H}{\sin (u'_Z - u'_H)} + y_Z^* \sin u'_Z - y_H^* \sin u'_H$$
$$- y_M^*\,(\sin u'_Z - \sin u'_H) \qquad \text{(XI 2,4)}$$

berechnen, wo y_Z^* , y_H^* die Achsenabstände der Schnittpunkte des Zonenstrahls bzw. des Hauptstrahls mit der um e (gegen die paraxiale Bildebene E) verschobenen achsensenkrechten Ebene E^* bedeuten.

Aus den so errechneten Lichtwegdifferenzen ergibt sich wieder der Phasenunterschied $\triangle\varphi_{Z|H}$ durch Division durch die Wellenlänge und Multiplikation mit 2π, also

$$\triangle\varphi_{Z|H}^{(M)} = \frac{2\pi\,(w_Z - w_H)_M}{\lambda}\,. \qquad \text{(XI 2,5)}$$

Wie unter 1. angegeben, wird man diese Phasendifferenzen sowohl für verschiedene Punkte M einer (sowie verschiedener) „Bildebenen" als auch für verschiedene Zonenstrahlen berechnen, um zu ermitteln, für welchen Punkt M der Bildebene die einzelnen, den verschiedenen vom Objektpunkt ausgehenden Strahlen bildseitig zugeordneten ebenen Wellen sich phasenmäßig am wenigsten unterscheiden und wie groß diese Phasenunterschiede für die einzelnen „Bildpunkte" sind.

3. Korrektionsforderungen

Abschließend sei noch erwähnt, daß nach den oben erwähnten wellenoptischen Überlegungen für die Korrektion optischer Systeme anzustreben ist, daß

für die sphärische Aberration

mit einem Koeffizienten

$$\left[\begin{matrix}\text{also darzustellen durch} \\ \triangle s' = a\,(1 - \cos u')\end{matrix}\right]\Bigg\}: \qquad (\triangle s')_{\max} \leqq \frac{2}{1 - \cos u'_{\max}}\,\lambda$$

mit zwei Koeffizienten

$$\left[\begin{matrix}\text{also darzustellen durch} \\ \triangle s' = a\,(1 - \cos u') + b\,(1 - \cos u')^2\end{matrix}\right]\Bigg\}: \qquad \begin{matrix} a = -\,b\,(1 - \cos u'_{\max}), \\ (\triangle s')_{\max} \leqq \dfrac{3}{1 - \cos u'_{\max}}\,\lambda; \end{matrix}$$

für den Astigmatismus,

wenn $2a$ der Abstand der beiden Brennlinien,
Θ der bildseitige Öffnungswinkel des abbildenden Strahlenbündels ist:

$$2a\,(1 - \cos\Theta) \leqq 0{,}7\,\lambda;$$

für den Komafehler:

$$\overline{GK} \cdot \sin^2\Theta \leqq \lambda,$$

wenn $\overline{GK}$ die auf dem Hauptstrahl gemessene Länge zwischen seinem Schnittpunkt G mit der GAUSSschen (paraxialen) Bildebene und seinem Berührungspunkt K mit der Kaustik und Θ der maximale Öffnungswinkel des bildseitigen Strahlenbündels ist.

Leider werden sich diese Forderungen bei optischen Systemen, insbesondere bei Mikroskopobjektiven hoher Vergrößerung oft nicht ausreichend erfüllen lassen.

XII. Über aplanatische Flächen, Linsen und Linsensysteme

1. Folgerungen aus der SEIDELschen Bildfehlertheorie

Wir sprachen im Abschnitt VII 2 (S. 87) davon, daß ein optisch konjugiertes Punktepaar, für das die *sphärische Aberration* behoben und *gleichzeitig die Sinusbedingung* erfüllt ist, als aplanatisches Punktepaar bezeichnet wird.

Fragen wir nun, ob und unter welchen Bedingungen es möglich ist, mit *Kugel*flächen eine aplanatische Abbildung zu erreichen.

Damit die *sphärische Aberration* einer brechenden Fläche behoben ist, muß der Seidelsche Bildfehlerkoeffizient der sphärischen Aberration und daher der zugehörige Flächenteilkoeffizient

$$\mathsf{A}_\nu = \left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^4 Q_\nu \cdot \Delta \left(\frac{1}{n\,s}\right)_\nu \qquad \text{(XII 1,1)}$$

den Wert 0 besitzen. Wir können also fragen, wann dies der Fall ist, und finden so, daß

$$\mathsf{A}_\nu = 0$$

ist, wenn

1) $$Q_\nu = n_\nu \left(\frac{1}{r_\nu} - \frac{1}{s_\nu}\right) = n'_\nu \left(\frac{1}{r_\nu} - \frac{1}{s'_\nu}\right) = 0 ,$$

also

$$s_\nu = s'_\nu = r_\nu , \qquad \text{(XII 1,2)}$$

Objekt und Bild also im Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche zusammenfallen, oder wenn

2) $$\Delta \left(\frac{1}{n\,s}\right)_\nu = \frac{1}{n'_\nu s'_\nu} - \frac{1}{n_\nu s_\nu} = 0 ,$$

also wegen

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} ,$$

wenn

$$s_\nu = r_\nu \left(\frac{n'_\nu}{n_\nu} + 1\right) \quad \text{und demnach} \quad s'_\nu = r_\nu \left(\frac{n_\nu}{n'_\nu} + 1\right) \qquad \text{(XII 1,3)}$$

ist.

Da die SEIDELschen Bildfehlerkoeffizienten und ihre Flächenteilkoeffizienten sich nur auf die Abbildungsfehler bis zur dritten Ordnung beziehen, das Verschwinden der Flächenteilkoeffizienten also die *strenge* Behebung der Bildfehler nicht garantiert, benutzen wir hier die aus der Wellenoptik bekannte

Tatsache, daß die „optische Weglänge" längs zweier vom gleichen Punkt ausgehender oder durch den gleichen Punkt gehender, zueinander *benachbarter* Strahlen bis zu dem Punkt, in dem sie sich wieder treffen (durchsetzen), den gleichen Betrag hat. Daraus folgt sofort, daß für eine von *sphärischer Aberration freie* Abbildung eines Punktes die Forderung erfüllt sein muß, die man als „Forderung der Konstanz der Lichtwege" bezeichnet und die verlangt, daß längs *aller* zur Abbildung des Punktes beitragenden Strahlen die *optische Weglänge* zwischen Objektpunkt und Bildpunkt den *gleichen* Wert besitzt.

Diese Forderung gibt die Möglichkeit, die Daten einer brechenden Fläche zu bestimmen, die mit Bezug auf einen vorgegebenen Objektpunkt und seinen Bildpunkt eine von sphärischer Aberration freie Abbildung vermittelt.

Ist wieder s der Abstand des Objektpunktes O, s' der des Bildpunktes O' vom Scheitel der brechenden Fläche, die die beiden Medien vom Brechungsindex n bzw. n' voneinander trennt, $I = (x, y, z)$ der Punkt der Fläche, in dem der von O ausgehende Strahl nach O' hin gebrochen wird, so soll also — mit Berücksichtigung der Vorzeichen von s und s' —

$$n' \cdot \overrightarrow{IO'} + n \cdot \overrightarrow{OI} = n' \sqrt{(s'-x)^2 + y^2 + z^2} - n \sqrt{(s-x)^2 + y^2 + z^2} = \text{const}$$
$$= n' s' - n s \qquad \text{(XII 1,4)}$$

sein, wobei aber gleichzeitig noch in *jedem* Punkte I das Brechungsgesetz $n \sin i = n' \sin i'$ erfüllt sein muß. Es ergibt sich also eine zur Verbindungslinie von O mit O' rotationssymmetrische Fläche.

Wir können noch — wenn wir etwa durch r_0 den Scheitelkrümmungsradius der brechenden Fläche bezeichnen — die Größe s' durch r, s, n, n' nach der paraxialen Abbildungsformel ausdrücken. Es ist

$$s' = \frac{n' r_0 s}{s(n'-n) + r_0 n}. \qquad \text{(XII 1,5)}$$

Verlangen wir andererseits, daß die brechende Fläche eine Kugelfläche sein soll — was selbstverständlich ein Spezialfall ist, der sich aber in vielen praktischen Fällen als notwendig erweist —, so muß

$$(x-r)^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \text{d. h.} \quad y^2 + z^2 = 2rx - x^2$$

sein, so daß

$$n' \sqrt{s'^2 + 2x(r-s')} - n \sqrt{s^2 + 2x(r-s)} = n's' - ns. \qquad \text{(XII 1,6)}$$

Diese Beziehung ist — wie man leicht nachprüft — für die oben angegebenen, aus $\triangle \left(\frac{1}{n\,s}\right)_\nu = 0$ folgenden optisch konjugierten Werte

$$s = r_\nu \left(\frac{n'_\nu}{n_\nu} + 1\right); \qquad s' = r_\nu \left(\frac{n_\nu}{n'_\nu} + 1\right) \qquad \text{(XII 1,7)}$$

für alle Werte von x, also für *alle* Strahlen des abbildenden Strahlenbündels stets erfüllt, wobei übrigens in (XII 1,4) const $= 0$ ist.

Ferner ist die Beziehung — unabhängig von x, also für *alle* vom Achsenpunkt eines Objekts ausgehenden Strahlen — stets erfüllt, wenn

$$s = r \quad \text{mit} \quad s' = r \qquad \text{(XII 1,8)}$$

ist. Die Konstante in (XII 1,4) hat hier den Wert const $= (n' - n)\, r$. Da andererseits die aus der Forderung der Konstanz der Lichtwege abgeleitete Gleichung (XII 1,4) in s sowie in s' quadratisch ist und zwischen s und s' die Beziehung (XII 1,5) gilt, gibt es nur diese beiden Lösungspaare bei vorgegebenem r.

Ebenso erkennen wir aus (XII 1,7), da n und n' beide positiv sind, daß es nicht möglich ist, eine *Kugel*fläche zu bestimmen, die einem negativen s-Wert einen positiven s'-Wert und umgekehrt optisch so zuordnet, daß über die ganze Öffnung die sphärische Aberration behoben ist.

Untersuchen wir nun, ob für die beiden gefundenen Punktepaare (XII 1,7) und (XII 1,8) die Sinusbedingung erfüllt ist, so erkennen wir sofort, daß für das Punktepaar (XII 1,8) $u = u'$, also

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \frac{n}{n'} = \text{const} = \beta_0' \qquad \text{(XII 1,9)}$$

ist, dieses Punktepaar also als „aplanatisch" zu bezeichnen ist.

Für das Punktepaar (XII 1,7) hat die Konstante in (XII 1,4) den Wert 0. Andererseits ist

$$\sin u = \frac{r}{\sqrt{(s-x)^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\sin u' = \frac{r}{\sqrt{(s'-x)^2 + y^2 + z^2}},$$

also mit (XII 1,7) und const $= 0$

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \frac{n \sqrt{(s'-x)^2 + y^2 + z^2}}{n' \sqrt{(s-x)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{n^2}{n'^2} = \text{const} = \beta_0'. \qquad \text{(XII 1,10)}$$

Auch das Punktepaar (XII 1,7) ist demnach als „aplanatisch" im strengen Sinne anzusprechen.

Die aplanatische Abbildungen erzeugenden *Flächen* bzw. *Linsen* pflegt man (auch) als aplanatisch (abbildend) mit Bezug auf das betreffende Punktepaar zu bezeichnen.

Dabei erhält man aplanatische *Linsen* durch Kombination aplanatischer Flächen (im angegebenen Sinne). Es ist indessen (auch) *nicht* möglich, durch *Linsen* oder Linsen*systeme*, die nur Kugelflächen (einschließlich Planflächen) enthalten, einem negativen s_1-Wert einen positiven s_k'-Wert (bzw. umgekehrt) aplanatisch zuzuordnen, wie man leicht einsieht, wohl aber kann man — was besonders für Mikroskope wichtig ist — erreichen, daß „aplanatisch" die Öffnung des abbildenden Strahlenbündels wesentlich verringert wird, die Linse bzw. das Linsensystem also „sammelnd" wirkt.

Für die Bestimmung aplanatischer Einzellinsen sind vier verschiedene Kombinationen zweier aplanatischer Flächen möglich, nämlich

a) erste Fläche *konzentrisch* zum Achsenpunkt des Objektes, zweite Fläche aplanatisch nach (XII 1,7) mit Bezug auf das durch die erste Fläche erzeugte, mit dem Krümmungsmittelpunkt der ersten Fläche zusammenfallende Bild des Objekt-Achsenpunktes,

b) beide Flächen konzentrisch zum Objekt-Achsenpunkt,

c) erste Fläche aplanatisch nach (XII 1,7) zum Achsenpunkt des Objektes, zweite Fläche konzentrisch zu dem durch die erste Fläche erzeugten Bild des Objekt-Achsenpunktes,

d) erste Fläche wie bei c), zweite Fläche gleichfalls aplanatisch nach (XII 1,7) zu dem durch die erste Fläche erzeugten Bild des Objekt-Achsenpunktes.

Nur die Anordnung nach a) liefert eine im eigentlichen Sinne „sammelnde“ Einzellinse, mit der aber — wie schon erwähnt — auch kein reelles Bild eines reellen Objektes, wohl aber ein (vergrößertes) virtuelles Bild des reellen Objektes erzeugt werden kann.

Fragen wir noch, ob die Verhältnisse anders liegen, wenn wir auch solche brechenden (oder spiegelnden) Flächen zulassen, die von der Kugelflächengestalt abweichen, also „deformiert“ sind. Damit eine solche (rotationssymmetrische) deformierte Fläche ein im Abstand s von ihrem Scheitel liegendes achsensenkrechtes Objekt aplanatisch im Scheitelabstand s' abbildet, müssen ja von ihr folgende Bedingungen erfüllt werden:

I. die von dem Objektpunkt unter beliebigem Winkel zur Symmetrieachse geneigt ausgehenden Lichtstrahen sollen nach der Brechung an der zwei Medien mit den Brechungsindizes n und n' (mit $n' \neq n$) trennenden Fläche alle durch ein und denselben Punkt der Symmetrieachse hindurchgehen;

II. für alle diese Strahlen soll der Quotient der Produkte $n \sin u$ und $n' \sin u'$ den gleichen konstanten Wert β' der paraxialen Vergrößerung besitzen („Sinusbedingung“).

Sind diese beiden Forderungen erfüllt, so ist die Brechung bzw. Spiegelung ($n' = -n$) erstens: frei von sphärischer Aberration und zweitens: frei vom Komafehler, wie von ABBE gezeigt wurde.

Aus der Forderung II und dem SNELLIUSschen Brechungsgesetz läßt sich bei vorgegebenem n und n' und vorgegebenem Abstand s des Objektpunktes sowie s' des Bildpunktes eine Differentialgleichung ableiten, der die brechenden (bzw. spiegelnden) Flächen genügen müssen, damit bei der durch sie bewirkten Abbildung die Sinusbedingung erfüllt ist, daß es sich bei der betreffenden Fläche also um eine *aplanatisch abbildende Fläche* handelt, *wenn gleichzeitig* für sie die *Forderung I erfüllt* ist, *vorausgesetzt, daß eine* solche Fläche, die bei gegebenen Werten von n und n' ein im Abstand s von der Fläche befindliches Objekt im Abstand s' von der Fläche *aplanatisch* abbildet, *tatsächlich existiert,* was leider — wie wir unten noch sehen werden — nicht immer das Fall ist.

2. Die Differentialgleichung der die Sinusbedingung erfüllenden Flächen

Da es sich um eine rotationssymmetrische Fläche handeln soll, bezeichnen wir die Rotationsachse als z-Achse, den Abstand der Flächenpunkte durch

$\varrho = \varrho\,(z)$. Dann gilt (s. Abb. 65)

$$\frac{d\varrho}{dz} = \operatorname{tg}\chi\,; \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - \chi\,; \qquad i = \varphi - u = \frac{\pi}{2} - \chi - u\,, \qquad \text{(XII 2,1)}$$
$$i' = \varphi - u' = \frac{\pi}{2} - \chi - u'\,.$$

Weiter gilt das Brechungsgesetz, aus dem folgt

$$n' \sin i' = n \sin i\,. \qquad \text{(XII 2,2)}$$

Nach der Forderung II, der ABBEschen Sinusbedingung, gilt

$$\frac{n' \sin u'}{n \sin u} = \frac{1}{\beta'} = C_3 = 1 + C_2 = \lim_{u \to 0} \frac{n'\,u'}{n\,u} = \frac{n'\,s}{n\,s'}\,, \qquad \text{(XII 2,3)}$$

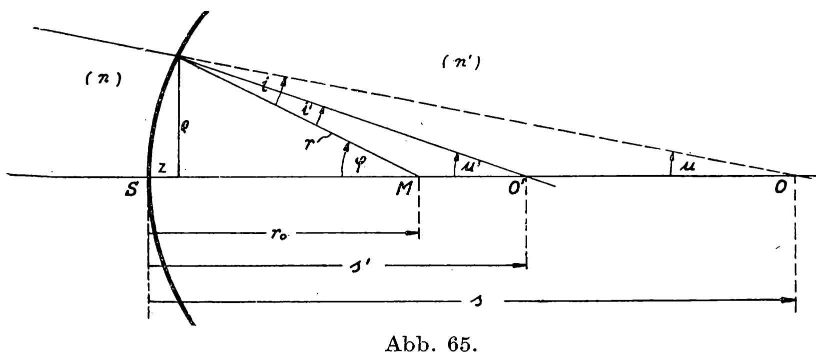


Abb. 65.

während Forderung I nach dem FERMATschen Satz von der Konstanz der „Lichtwege" aller Strahlen zwischen Objektpunkt und Bildpunkt bei punktförmiger Abbildung sich schreiben läßt

$$n' \sqrt{(s'-z)^2 + \varrho^2} - n\sqrt{(s-z)^2 + \varrho^2} = n'\,s' - n\,s = C_1\,, \qquad \text{(XII 2,4)}$$

wenn für s und s' die in der Optik geltende Vorzeichenvorschrift berücksichtigt wird, nach der $s = \overrightarrow{SO}$, $s' = \overrightarrow{SO'}$ positiv sind, wenn O bzw. O' im Sinne der Lichtrichtung hinter S liegt, wie dies in der Abb. 65 der Fall ist, und wenn den *Wurzeln* das *Vorzeichen von s bzw. s'* gegeben wird.

Nun folgt aus (XII 2,1_3), (XII 2,1_4) und (XII 2,2)

$$\frac{n \sin i}{n' \sin i'} = \frac{n\,(\operatorname{tg}\varphi \cos u - \sin u)}{n'\,(\operatorname{tg}\varphi \cos u' - \sin u')} = 1\,,$$

also mit (XII 2,3)

$$n \cdot \operatorname{tg}\varphi \cos u = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{n'^2 - C_3^2\,n^2 \sin^2 u} - C_2\,n \sin u\,,$$
$$n \cos u = \sqrt{n'^2 - C_3^2\,n^2 \sin^2 u} - C_2\,n \sin u \operatorname{ctg}\varphi\,,$$
$$n'^2 - C_3^2\,n^2 \sin^2 u = n^2 \cos^2 u + C_2^2\,n^2 \sin^2 u \operatorname{cotg}^2\varphi +$$
$$+ 2\,C_2\,n^2 \sin u \cos u \operatorname{cotg}\varphi\,. \qquad \text{(XII 2,4)}$$

Hierin ist

$$\sin u = \frac{\varrho}{\sqrt{(s-z)^2+\varrho^2}}; \qquad \cos u = \frac{s-z}{\sqrt{(s-z)^2+\varrho^2}};$$

$$C_2 = \frac{n' s - n s'}{n s'}; \qquad C_3 = \frac{n' s}{n s'}; \qquad \operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} \chi = \frac{d\varrho}{dz},$$

so daß (XII 2,5) übergeht in

$$n'^2 - \frac{n'^2 s^2}{s'^2} \frac{\varrho^2}{(s-z)^2+\varrho^2} = n^2 \frac{(s-z)^2}{(s-z)^2+\varrho^2} + \frac{(n' s - n s')^2}{s'^2} \cdot \frac{\varrho^2}{(s-z)^2+\varrho^2} \left(\frac{d\varrho}{dz}\right)^2$$
$$+ 2n \frac{n' s - n s'}{s'} \cdot \frac{\varrho(s-z)}{(s-z)^2+\varrho^2} \frac{d\varrho}{dz}$$

oder nach einfacher Umformung

$$\left(\frac{d\varrho}{dz}\right)^2 + 2 \frac{n s'}{n' s - n s'} \frac{s-z}{\varrho} \frac{d\varrho}{dz} = \frac{n'^2 s'^2}{(n' s - n s')^2} \frac{(s-z)^2+\varrho^2}{\varrho^2}$$
$$- \frac{n'^2 s^2}{(n' s - n s')^2} - \frac{n^2 s'^2}{(n' s - n s')^2} \frac{(s-z)^2}{\varrho^2}, \qquad \text{(XII 2,6)}$$

$$\frac{d\varrho}{dz} = - \frac{n s'}{n' s - n s'} \left[\frac{s-z}{\varrho} \pm \frac{n'}{n} \sqrt{\frac{(s-z)^2}{\varrho^2} - \frac{s^2}{s'^2} + 1} \right]. \qquad \text{(XII 2,6*)}$$

Diese Differentialgleichung, der jede „aplanatische Fläche“ — sofern eine solche für die vorgegebenen Werte s, s', n, n' und den hieraus für den Scheitelkrümmungsradius r_0 der brechenden Fläche folgenden Wert $r_0 = \frac{(n'-n)\, s s'}{n' s - n s'}$ existiert — genügen muß, läßt sich mit $\varrho^2 = y$ noch in der einfacheren Form schreiben

$$\frac{dy}{dz} = -2 \frac{n s'}{n' s - n s'} (s-z) \pm 2 \frac{n' s'}{n' s - n s'} \sqrt{(s-z)^2 - \frac{s^2 - s'^2}{s'^2} y}. \qquad \text{(XII 2,6**)}$$

Eine andere Form der Differentialgleichung (XII 2,6) bzw. (XII 2,6**) sei hier gleichfalls noch angegeben. Sie läßt sich mit

$$y = \varrho^2, \; x = s - z \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{r_0}{s} = \frac{(n'-n)s'}{n' s - n s'} \qquad \text{(XII 2,7)}$$

schreiben

mit

$$\left.\begin{aligned} & y'^2 + Axy' + By = Cx^2 \\ & A = -4 \frac{n}{n'-n} \alpha, \\ & B = 4\left[1 + 2 \frac{n}{n'-n} \alpha - \frac{n+n'}{n'-n} \alpha^2\right], \\ & C = 4 \frac{n+n'}{n'-n} \alpha^2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII 2,8)}$$

Man zeigt leicht, daß die beiden Spezialfälle, für die sich *Kugel*flächen als aplanatische brechende Flächen ergeben, nämlich 1. für $s = s' = r_0$ und

2. für $$s = \frac{n + n'}{n} r_0 , \qquad s' = \frac{n + n'}{n'} r_0$$

[also $$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{r_0} = \frac{1}{n' - n}\left(\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s}\right), \quad \text{d. h.} \quad n\,s = n'\,s' = (n + n')\,r_0 ,$$

d h. $\frac{n'}{s} = \frac{n}{s'}$] und für die die Gleichung der brechenden Fläche (in beiden Fällen) $(z - r_0)^2 + \varrho^2 = r_0^2$ lautet mit

$$1.\ r_0 = s = s' \qquad \text{bzw.} \qquad 2.\ r_0 = \frac{n\,s}{n + n'} = \frac{n'\,s'}{n + n'},$$

Lösungen der Differentialgleichung mit den angegebenen Werten von s und s' sind.

Unter den Lösungen der Differentialgleichung befinden sich aber offensichtlich auch physikalisch unrichtige Lösungen, bedingt durch das nicht eindeutige Vorzeichen der in den Lösungen der Differentialgleichung auftretenden Wurzeln.

Berechnet man aus der Differentialgleichung mit Hilfe der Formel

$$r_0 = [\pm\,(1 + \varrho'^2)^{3/2} : \varrho''] \quad \text{für} \quad z = 0, \quad \text{d. h. für} \quad x = s \quad \text{und} \quad \varrho = 0$$

$$\text{mit} \quad \varrho' = \frac{d\varrho}{dz} = -\frac{d\varrho}{dx} \quad \text{und} \quad \varrho'' = \frac{\partial \varrho'}{\partial z} + \frac{\partial \varrho'}{\partial \varrho}\frac{d\varrho}{dz} = -\frac{\partial \varrho'}{dx} - \frac{\partial \varrho'}{\partial \varrho}\cdot\varrho'$$

den Scheitelkrümmungsradius r_0 der Fläche, die durch die Differentialgleichung (XII 2,6*)

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{dz} = -\frac{n\,s'}{n'\,s - n\,s'}\,\frac{x}{\varrho} \mp \frac{n'\,s'}{n'\,s - n\,s'}\sqrt{\frac{x^2}{\varrho^2} - \frac{s^2}{s'^2} + 1}$$

mit $x = s - z$ bestimmt ist, so findet man für r_0 *vier* mögliche Werte, nämlich

$$1) \quad r_0 = \frac{s\,s'}{n'\,s - n\,s'}(n' - n),$$

$$2) \quad r_0 = \frac{s\,s'}{n'\,s - n\,s'}(n - n'),$$

$$3) \quad r_0 = \frac{s\,s'}{n'\,s - n\,s'}(n + n'),$$

$$4) \quad r_0 = -\frac{s\,s'}{n'\,s - n\,s'}(n + n'),$$

von denen nur der erste physikalisch dem vorgelegten Problem entspricht, d. h. sich aus $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r_0}$ gleichfalls ergibt. Die Differentialgleichung liefert aber auch solche Flächen, deren Scheitelkrümmungsradius den anderen Gleichungen 2, 3 oder 4 genügt. Aus den Lösungen ist daher gegebenenfalls

(s. u.) jeweils diejenige Fläche als dem Problem angepaßte auszuwählen, deren Scheitelkrümmungsradius den Wert

$$r_0 = \frac{s\,s'}{n'\,s - n\,s'}(n' - n)$$

ergibt.

Bei der Ableitung der Differentialgleichung haben wir *nur* von den Forderungen der Erfüllung der Sinusbedingung und der Erfüllung des Brechungsgesetzes für die einander optisch zugeordneten Strahlen des Objektraumes und des Bildraumes Gebrauch gemacht, *nicht aber* von der Forderung (XII 2,4) der Konstanz der optischen Weglängen, die erfüllt sein muß, wenn alle von dem Objektpunkt (auf der Achse des rotationssymmetrischen Systems) ausgehenden Strahlen sich nach dem Durchgang durch das optische System im gleichen Achsenpunkt des Bildraumes treffen sollen.

Aus Gleichung (XII 2,4) erhält man nach etwas langwierigen Rechnungen die Gleichung $\varrho = \varrho\,(z)$ der brechenden Fläche, die bei vorgegebenen n und n' die vom Achsen-Objektpunkt des Scheitelabstandes $\overrightarrow{SO} = s$ ausgehenden Strahlen nach der Brechung im Achsen-Bildpunkt des Scheitelabstandes $\overrightarrow{SO'} = s'$ vereinigt. Diese Gleichung der für den Objektabstand s „öffnungsfehlerfreien“ Fläche lautet

$$\begin{aligned} \varrho^2 = -z^2 + 2\,z\,\frac{n'^2\,s' - n^2\,s}{n'^2 - n^2} - 2\,\frac{n\,n'}{(n'^2 - n^2)^2}\,(n'\,s' - n\,s) \times \\ \times \left[(n'\,s - n\,s') \mathop{-}_{+} \sqrt{(n'\,s - n\,s')^2 + 2\,(n'^2 - n^2)\,(s' - s)\,z}\right]. \end{aligned} \qquad \text{(XII 2,9)}$$

Eine „aplanatisch abbildende“ (brechende oder spiegelnde) Fläche muß also sowohl der Differentialgleichung (XII 2,6*) bzw. (XII 2,6**) als auch der vorstehenden Gleichung (XII 2,9) genügen, aus der mit $\varrho^2 = y$ für $\frac{d\varrho^2}{d\,z} = \frac{d\,y}{d\,z}$ — abweichend von (XII 2,6**) — folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\,y}{d\,z} = -2\,z + 2\,\frac{n'^2\,s' - n^2\,s}{n'^2 - n^2} + \\ + 2\,\frac{n\,n'\,(s' - s)}{n'^2 - n^2}\,\frac{n'\,s' - n\,s}{\sqrt{(n'\,s - n\,s')^2 + 2\,(n'^2 - n^2)\,(s' - s)\,z}}. \end{aligned} \qquad \text{(XII 2,10)}$$

Die Gleichungen (XII 2,6**) und (XII 2,10) können *gleichzeitig* nur unter bestimmten einschränkenden Annahmen für s, s', n, n' gelten.

Andererseits zeigt man aber auch leicht, daß die bei Aufstellung der Differentialgleichung vorausgesetzte Existenz einer derartigen — im allgemeinen Fall natürlich deformierten, also nicht kugelflächenförmigen — aplanatisch abbildenden Fläche nicht für jedes beliebige Wertequadrupel n, n', s, s' gelten kann, wenigstens nicht, wenn es sich um eine reelle Fläche handeln soll, was für die Herstellung in der Praxis ja notwendig ist.

Die Aplanasie setzt ja 1. die Erfüllung der Sinusbedingung und 2. die aberrationsfreie Strahlenvereinigung voraus. Die Erfüllung der Sinus-

bedingung besagt, daß $\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta'$ ist. Andererseits ist $\beta' = \frac{n\,s'}{n'\,s}$. Daraus folgt also, daß $s' \sin u' = s \sin u$ ist. Geht man nun daran, die Fläche zu konstruieren, für die die Sinusbedingung erfüllt ist, so erkennt man zunächst, daß in der Beziehung $s' \sin u' = s \sin u$ die Brechungszahlen selbst gar nicht mehr explizite auftreten.

Wählen wir auf einer Geraden den Schnittpunkt der brechenden Fläche, ferner den Objektpunkt und den zugehörigen Bildpunkt, gegeben durch die Forderung, daß die vom Objektpunkt mit der Objektschnittweite s ausgehenden Strahlen sich im Bildpunkt mit der Bildschnittweite s' vereinigen sollen unter Einhaltung der aus der Sinusbedingung folgenden Beziehung $s' \sin u' = s \sin u$, so können wir leicht zu jedem objektseitigen Strahl mit der Neigung u gegen die Achse den bildseitigen Strahl mit der Neigung u' gegen die Achse konstruieren und feststellen, wo sich diese beiden Strahlen schneiden. Diese Konstruktion erfordert keinerlei Rechnung, sondern läßt sich besonders einfach rein geometrisch durchführen, indem man (Abb. 66)

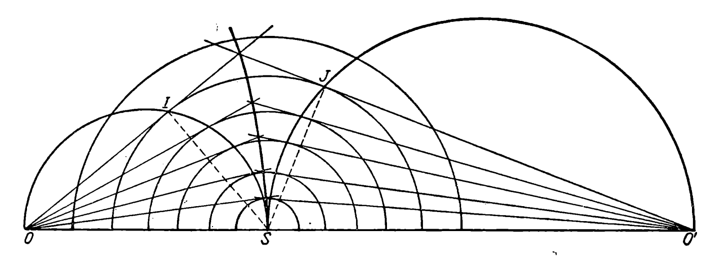


Abb. 66. Zur Konstruktion der Schnittpunkt-Flächen solcher „Strahlen" (bei vorgegebenem s und s'), die der Sinusbedingung genügen.

1. einen Halbkreis zeichnet, der durch den Objektpunkt O und den Flächenscheitel S hindurchgeht, 2. einen Halbkreis, der durch den gewünschten Bildpunkt O' und den Flächenscheitel hindurchgeht, und indem man 3. um den Flächenscheitel als Mittelpunkt eine größere Zahl von Halbkreisen zeichnet. Dort, wo einer dieser Halbkreise um den Flächenscheitel S die zuerst genannten Halbkreise über OS bzw. SO' trifft, erhalten wir gerade diejenigen Schnittpunkte — z. B. die Schnittpunkte I und J —, durch die der objektseitige Strahl bzw. der nach der Sinusbedingung erforderliche zugeordnete bildseitige Strahl hindurchgeht. Denn man sieht leicht, daß für diese beiden Strahlen $s \sin u = s' \sin u'$, und zwar gleich dem Radius des betreffenden, um den Flächenscheitel S gezeichneten Kreises ist. Man erhält so als Schnittpunkte der einander nach dem Sinussatz entsprechenden „objektseitigen Strahlen" und „bildseitigen Strahlen" eine Reihe von Punkten $F_{uu'}$ die auf der brechenden Fläche liegen müßten. Verbindet man diese Punkte aber miteinander, so erkennt man leicht und unmittelbar, daß für diese Fläche im allgemeinen für die einzelnen Strahlen das Brechungsgesetz keineswegs erfüllt sein kann. Dazu hätte man nämlich durch jeden Schnittpunkt eine Linie so

zu ziehen, daß für den „einfallenden Strahl“ und für den zugehörigen „gebrochenen Strahl“ das Brechungsgesetz erfüllt ist, also daß $n' \sin i' = n \sin i$ wird. Zu dieser Hilfslinie hätte man dann durch den Schnittpunkt eine Normale zu zeichnen, die die Tangente an dem Schnitt der brechenden Fläche mit der Papierebene sein müßte. Alle so gezeichneten Normalen würden als Einhüllende die brechende Fläche ergeben, die mit der zuvor gezeichneten Fläche der Strahlschnittpunkte identisch sein müßte, was für beliebige Wertepaare n, n' sicher nicht der Fall ist.

Man muß also leider folgern, daß es nicht für alle möglichen Lagen von Objekt und Bild aplanatisch brechende Flächen, auch nicht asphärisch-aplanatisch brechende Flächen geben wird, sondern daß Flächen mit derartigen aplanatischen Eigenschaften nur in Ausnahmefällen, d. h. für bestimmte Objekt- und Bildlagen (bei gegebenen Brechungszahlen), möglich sein werden, wobei zu diesen natürlich die Kugelflächen gehören, die sich als brechende Flächen für

$$1.\ s = r \quad \text{mit} \quad s' = r$$

und

$$2.\ \text{für } s = r\left(\frac{n+n'}{n}\right) \quad \text{und} \quad s' = r\left(\frac{n+n'}{n'}\right),$$

d. h. für

$$n\,s = n' s' = (n + n')\,r$$

ergeben.

Fragen wir nun weiter, welcher Gleichung die zuvor geometrisch konstruierte Fläche genügt, für die $s' \sin u' = s \sin u$ und demnach $\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \frac{n\,s'}{n'\,s} = \beta'$ ist, für die also die Sinusbedingung sowie die aberrationsfreie Abbildung des Achsenpunktes, von dem die Strahlen ausgehen, erfüllt sein würde, wenn diese Fläche die sonstigen Eigenschaften einer brechenden (bzw. spiegelnden) Fläche für vorgegebene Brechungszahlen n und n' besitzen würde.

Bezeichnen wir die Koordinaten des Schnittpunktes eines objektseitigen „Strahles“ der Neigung u gegen die Achse mit dem ihm nach der Beziehung $s \sin u = s' \sin u'$ bildseitig zugeordneten „Strahl“ durch z^*, ϱ^*, so sind (Abb. 67) die beiden „Strahlen“ bestimmt durch die Punkte

$$1.\ z_{11} = s, \quad \varrho_{11} = 0; \quad z_{12} = c \sin u, \quad \varrho_{12} = c \cos u,$$

$$2.\ z_{21} = s', \quad \varrho_{21} = 0; \quad z_{22} = c \sin u', \quad \varrho_{22} = c \cos u',$$

worin nach der Konstruktion noch $s \sin u = s' \sin u' = c$ mit $c = c(u)$ gesetzt wurde.

Dann gilt für die *nach Konstruktion* einander *zugeordneten* „Strahlen“

$$\frac{z - z_{11}}{\varrho - \varrho_{11}} = \frac{z_{11} - z_{12}}{\varrho_{11} - \varrho_{12}}, \quad \text{also} \quad z - s = \varrho\,\frac{s - c \sin u}{-c \cos u} = \varrho\,\frac{s^2 - c^2}{-c\sqrt{s^2 - c^2}},$$

und entsprechend

$$z - s' = \varrho\,\frac{s' - c \sin u'}{-c \cos u'} = \varrho\,\frac{s'^2 - c^2}{-c\sqrt{s'^2 - c^2}}.$$

Daraus folgt

$$\varrho^2 (s^2 - c^2) = c^2 (z - s)^2 ,$$

bzw.

$$\varrho^2 (s'^2 - c^2) = c^2 (z - s')^2 .$$

Ferner

$$\left. \begin{aligned} c^2 [(z - s)^2 + \varrho^2] &= \varrho^2 s^2 , \\ c^2 [(z - s')^2 + \varrho^2] &= \varrho^2 s'^2 . \end{aligned} \right\} \qquad \text{(XII 2,11)}$$

Für die Schnittpunktkoordinaten z^*, ϱ^* folgt hieraus für $s \neq s'$ durch Division

$$s'^2 (z^* - s)^2 + \varrho^{*2} s'^2 = s^2 (z^* - s')^2 + \varrho^{*2} s^2 ,$$

so daß zwischen z^* und ϱ^* die Gleichung besteht

$$\left(z^* - \frac{s\,s'}{s + s'}\right)^2 + \varrho^{*2} = \left(\frac{s\,s'}{s + s'}\right)^2 .$$

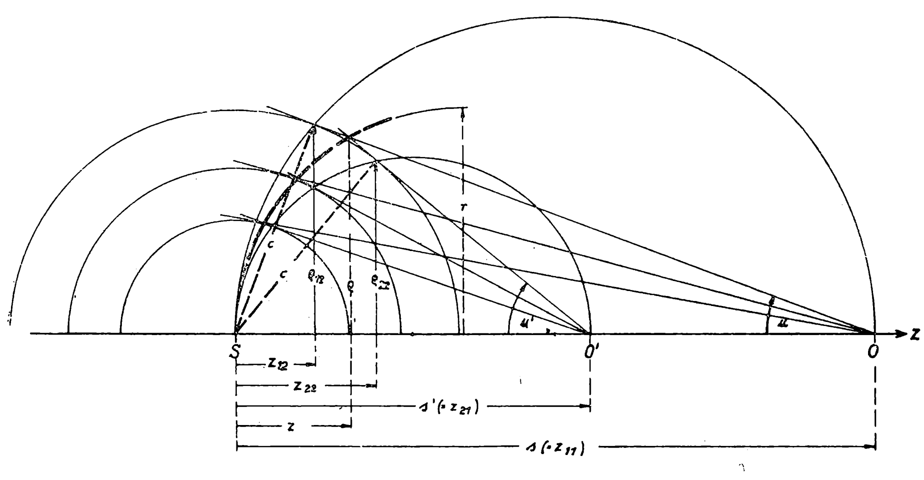


Abb. 67.

Die Schnittpunktfläche ist also eine Kugelfläche vom Radius $r = \dfrac{s\,s'}{s + s'}$. Da andererseits zwischen s, s' und dem Scheitelkrümmungsradius r_0' einer die Medien mit den Brechungszahlen n und n' trennenden brechenden Fläche die Beziehung $\dfrac{n'}{s'} - \dfrac{n}{s} = \dfrac{n' - n}{r_0}$ gelten muß, so folgt mit $r = r_0$ (Kugelfläche), daß

$$s n' - n s' = (n' - n)(s + s'), \quad \text{also} \quad n s = n' s' = (n + n')\, r ,$$

entsprechend der ersten der bereits bekannten, oben angegebenen Beziehungen (XII 1,7) und (XII 1,8) für aplanatisch abbildende Kugelflächen.

Für den oben ausgeschlossenen Fall $s = s'$ — für den ja wegen $\dfrac{n'}{s'} - \dfrac{n}{s} = \dfrac{n' - n}{r}$

auch $s = s' = r$ gilt — werden die beiden Gleichungen (XII 2,11) und damit auch die beiden „Strahlen" identisch, so daß jeder Punkt der beiden Strahlen, insbesondere also der Punkt $z^* = s(1 - \cos u)$, $\varrho^* = s \sin u$ als „Strahlschnittpunkt" angesprochen werden kann, für den $(z^* - s)^2 + \varrho^{*2} = s^2 = r^2$ gilt.

Dies entspricht der zweiten der bekannten, oben angegebenen Beziehungen (XII 1,7) und (XII 1,8) für aplanatisch abbildende Kugelflächen.

Die Gleichungen (XII 2,6*) und (XII 2,9) [bzw. (XII 2,6**) und (XII 2,10)] sind also *gleichzeitig* nur für diese beiden Sonderfälle erfüllt, für die die abbildende Fläche eine Kugelfläche ist, während die zu anderen s, s', n, n' gehörigen Lösungen von (XII 2,6*) [bzw. (XII 2,6**)] nur die Erfüllung der Sinusbedingung gewährleisten, aber sphärische Aberration besitzen, und umgekehrt durch die zu anderen s, s', n, n' gehörigen Lösungen von (XII 2,9) [bzw. (XII 2,10)] die sphärische Aberration behoben, die Sinusbedingung aber *nicht* erfüllt ist.

Wohl aber lassen sich — wie hier nur kurz erwähnt sei — nach der auf S. 149/150 angegebenen Konstruktion „*Stufenflächen*" nach Art der bekannten FRESNELschen Scheinwerferlinsen angeben, die in Verbindung mit einer der in XII 1 angegebenen aplanatisch-brechenden Fläche (— als erste oder zweite Fläche —) eine „*Stufenlinse*" ergeben, die für einen vorgegebenen Objektabstand und einen gleichzeitig vorgegebenen Bildabstand und demnach für eine geforderte Vergrößerung aplanatisch abbildend ist.

Eine andere Anwendung der vorstehend durchgeführten Überlegungen führt zu einer aplanatisch-abbildenden *Spiegelanordnung*, bestehend aus einer größeren Anzahl von zur Achse konzentrischen schmalen, gegeneinander versetzten, auf ihrer Innenfläche verspiegelten Flächen, die mehr oder weniger angenähert die Form von *achsensenkrechten Abschnitten von* Kegelflächen oder genauer von *Rotationsellipsoiden* besitzen.

Derartige „*Stufenlinsen*" oder „*Spiegelabschnitt-Systeme*" erlauben die Anwendung einer sehr hohen Apertur, so daß sie ein besonders hohes Auflösungsvermögen zu geben versprechen. Eine praktische Ausführung derartiger Stufenlinsen oder Spiegelabschnitt-Systeme liegt indessen bisher noch nicht vor.

XIII. Das Eikonal und seine verschiedenen Formen

Das SEIDELsche Eikonal

1. Das BRUNSsche Eikonal

Die im FERMATschen Prinzip auftretende Summe $\sum_P^Q n_j l_j$ (bzw. $\int_P^Q n\,dl$) ist eine Funktion der Koordinaten der beiden Punkte P und Q. Außer von P und Q ist sie natürlich noch abhängig von der Lage des die beiden Punkte P und Q verbindenden Linienzuges, so daß bei festgehaltenem P und Q die Summe $\sum_P^Q n_j l_j$ bzw. das Integral $\int_P^Q n\,dl$ noch der verschiedensten Werte fähig ist. Nach dem FERMATschen Prinzip aber sind unter den verschiedenen, die Punkte P und Q verbindenden Linienzügen nur diejenigen wirkliche „Lichtwege", für die $\delta \sum_P^Q n_j l_j = 0$ bzw. $\delta \int_P^Q n\,dl = 0$ ist, für die also die betreffende Summe bzw. das betreffende Integral einen Extremwert darstellt. Dieser Extremwert ist dann (im allgemeinen) nur noch Funktion der Koordinaten von P und Q. Ihn bezeichnet man durch

$$E = E(x_P, y_P, z_P;\; x_Q,\, y_Q, z_Q) = E(P, Q)\,,$$

so daß also:

$$E(P, Q) = \text{Extrem}\left(\sum_P^Q n_j l_j\right) = \text{Extrem}\left(\int_P^Q n\,dl\right)$$

und nennt ihn mit BRUNS das **Eikonal** des betreffenden optischen Systems zwischen den Punkten P und Q. Hier sind x_P, y_P, z_P und x_Q, y_Q, z_Q die Koordinaten der Punkte P und Q in einem beliebigen Koordinatensystem. Im allgemeinen ist $E(P, Q)$ eine eindeutige Funktion der Koordinaten von P und Q. Nur in dem Falle, daß zwischen P und Q mehrere Lichtwege möglich sind, längs denen das Licht verschieden lange Zeit gebraucht, also in dem Falle, daß $\sum_P^Q n_j l_j$ bzw. $\int_P^Q n\,dl$ mehrere Extremwerte besitzt, ist $E(P, Q)$ entsprechend mehrdeutig.

Tragen wir auf allen von einem leuchtenden Punkte ausgehenden und eventuell gebrochenen oder gespiegelten Lichtstrahlen gleiche *optische*, also *vakuumbezogene* Weglängen $\sum n\,dl$ ab, so bilden die Endpunkte eine Fläche, die man als „*Fläche konstanten Eikonals*", als „*Fläche konstanter optischer Weglänge*"

bezeichnen kann. Die verschiedenen Flächen, die man so erhält, indem man die auf den Strahlen abzutragenden konstanten optischen Weglängen variiert, sind einander parallel, wenigstens soweit es sich um diejenigen Teile der verschiedenen Flächen handelt, die in ein und demselben Medium liegen (Abb. 68).

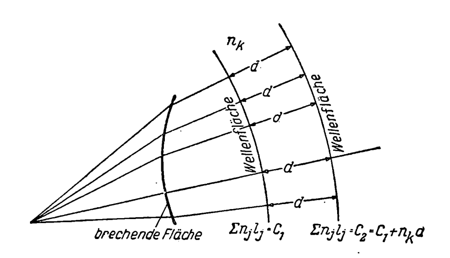


Abb. 68. Die „Flächen konstanten Eikonalwertes", die „Wellenflächen" eines von einem Objektpunkt ausgehenden Strahlenbündels, bilden innerhalb eines Mediums mit konstantem Brechungsindex eine Schar von Parallelflächen.

Man bezeichnet die so entstehenden Flächen auch als „*Wellenflächen*" oder als „Flächen gleicher Schwingungsphase", weil das Licht in allen Punkten einer solchen Fläche *gleichzeitig* die *gleiche* Schwingungsphase besitzt.

Auf den Wellenflächen nimmt daher das Eikonal entsprechend der Definition der Wellenflächen konstanten Wert an, so daß diese mathematisch durch die Gleichung

$$E\,(x_P,\, y_P,\, z_P;\; x,\, y,\, z) = \text{const}$$

definiert sind. Hier sind x, y, z als variable Koordinaten betrachtet.

Aus dem FERMATschen Prinzip (s. Einleitung) können wir nun leicht einen wichtigen Satz ableiten, den *Satz von* MALUS. Dieser sagt aus: Alle Lichtstrahlen, die von einem Punkte ausgehen, der in einem homogenen isotropen Medium liegt — und die daher die Normalen einer Kugelfläche bilden —, bilden nach beliebig vielen Brechungen und Spiegelungen in jedem homogenen isotropen Medium stets wieder die *Normalen* einer Flächenschar, eben der Schar der

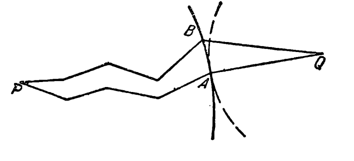


Abb. 69.

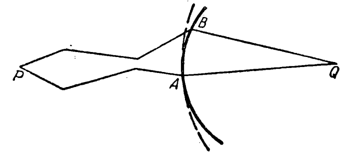


Abb. 70.

Abb. 69 und 70. Zum Beweise des Satzes von MALUS.

Wellenflächen, die aber im allgemeinen keine Kugelflächen mehr zu sein pflegen. Es sei (Abb. 69 und 70) wieder P der leuchtende Punkt, $\widehat{AB}$ eine Fläche konstanten Eikonals und Q ein Punkt der Normale in A auf $\widehat{AB}$, wobei angenommen sei, daß zwischen $\widehat{AB}$ und Q der Brechungsindex konstant ist. Die punktierte Linie sei der Schnitt mit der Kugelfläche um Q mit QA als Radius. Nach dem FERMATschen Prinzip soll $\sum\limits_P^Q n_j\, l_j = E\,(P, Q)$ ein Extremum sein. Nun ist $E\,(P, A) = E\,(P, B)$, da ja $\widehat{AB}$ eine Fläche konstanten Eikonals sein

sollte. Andererseits aber ist aus geometrischen Gründen, da $\overline{AQ}$ Normale auf $\widehat{AB}$ ist, in Abb. 69 für alle bei A liegenden Punkte $B \neq A$ der Wellenfläche $\widehat{AB}$

$$\overline{AQ} < \overline{BQ} \quad \text{und demnach auch} \quad E(A,Q) < E(B,Q)\,,$$

also:

$$E(P,A) + E(A,Q) < E(P,B) + E(B,Q)$$

$$E(P,Q)_{\text{über } A} < E(P,Q)_{\text{über } B}$$

für jede Lage von B auf $\widehat{AB}$, die nicht mit A zusammenfällt, A aber benachbart ist. Der tatsächliche Lichtweg ist also derjenige, der über A geht, also zur Fläche $\widehat{AB}$, zur Fläche konstanten Eikonals, orthogonal ist.

Ganz entsprechend folgt für Abb. 70, in der die um Q mit $\overline{QA}$ geschlagene Kugel die Fläche konstanten Eikonals „von außen" berührt, zunächst: $\overline{AQ} > \overline{BQ}$ für alle bei A liegende Punkte $B \neq A$ der Wellenfläche $\widehat{AB}$, und daraus:

$$E(P,Q)_{\text{über } A} > E(P,Q)_{\text{über } B}$$

für jede Lage von B auf $\widehat{AB}$, die nicht mit A zusammenfällt, A aber benachbart ist. Auch hier ist also der tatsächliche Lichtweg derjenige über A normal zur Fläche $\widehat{AB}$ konstanten Eikonals.

Die Flächen konstanten Eikonals, die Wellenflächen, sind also die orthogonalen Trajektorien der durch die Lichtstrahlen gegebenen Geradenschar. Kennen wir für diese Lichtstrahlen die analytische Darstellung, so können wir daraus auch die Gleichungen der Wellenflächen bestimmen.

Wir fragen jetzt nach der Differentialgleichung des Eikonals!

Da die Flächen konstanten Eikonals Parallelflächen sind, so ist der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Eikonalflächen konstant, wobei der „Abstand" an den einzelnen Stellen in Richtung des durch jene Stellen hindurchgehenden, zu beiden Eikonalflächen senkrechten Lichtstrahls (Satz von MALUS) zu messen ist. Bezeichnen wir die Richtungs*kosinus* des betreffenden Lichtstrahles im (als laufend betrachteten) Punkt Q durch $\bar{\alpha}_Q$, $\bar{\beta}_Q$, $\bar{\gamma}_Q$ und den Brechungsindex im Punkte Q durch n_Q, so folgt wegen $dE = n \cdot dl$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x_Q} &= \left(\frac{dE}{dl}\right)_Q \cdot \left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)_Q = n_Q\,\bar{\alpha}_Q\,,\\ \frac{\partial E}{\partial y_Q} &= \left(\frac{dE}{dl}\right)_Q \cdot \left(\frac{\partial l}{\partial y}\right)_Q = n_Q\,\bar{\beta}_Q\,, \qquad \text{(XIII 1,1)}\\ \frac{\partial E}{\partial z_Q} &= \left(\frac{dE}{dl}\right)_Q \cdot \left(\frac{\partial l}{\partial z}\right)_Q = n_Q\,\bar{\gamma}_Q\,,\end{aligned}$$

woraus sich als Differentialgleichung für das BRUNSsche Eikonal ergibt:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x_Q}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_Q}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z_Q}\right)^2 = n_Q^2\,,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\operatorname{grad}_Q E(P, Q) = \mathfrak{n}_Q .$$

Hierbei war P, der Ausgangspunkt des Lichtes, als fest, Q als variabel angenommen. Nehmen wir indessen Q als fest an und variieren den Ausgangspunkt P, so erhalten wir analog:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial x_P} = \left(\frac{dE}{dl}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)_P = -n_P \bar{\alpha}_P , \\ &\frac{\partial E}{\partial y_P} = -n_P \bar{\beta}_P ; \qquad \frac{\partial E}{\partial z_P} = -n_P \bar{\gamma}_P , \end{aligned} \qquad \text{(XIII 1,2)}$$

so daß

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x_P}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_P}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z_P}\right)^2 = n_P^2$$

oder auch

$$\operatorname{grad}_P E(P, Q) = -\mathfrak{n}_P .$$

Das Negativzeichen bei $\mathfrak{n}_P$ weist hier darauf hin, daß bei Verschiebung von P längs des Lichtstrahles in Richtung der Lichtfortpflanzung der Wert des Eikonals abnimmt, während er bei der entsprechenden Verschiebung von Q zunimmt. Ist n_Q bzw. n_P von Punkt zu Punkt der betreffenden Eikonalfläche verschieden, so gelten die angegebenen Differentialgleichungen — in denen dann eben nur rechts die Funktionen

$$n_Q = n(x_Q, y_Q, z_Q) \quad \text{bzw.} \quad n_P = n(x_P, y_P, z_P)$$

stehen — gleichfalls, doch ist der Abstand dl zwischen zwei aufeinander folgenden Eikonalflächen nicht mehr konstant, sondern von der Lage des Punktes Q (bzw. P) auf der Fläche abhängig. Denn da ja mit c = Vakuumlichtgeschwindigkeit, v = Lichtgeschwindigkeit in dem betreffenden Medium, τ = Schwingungsdauer, die ja — ebenso wie die Frequenz des Lichtes — vom Medium unabhängig ist, die Beziehung gilt:

$$n\,dl = c\frac{dl}{v} = \frac{c}{\tau}\cdot\frac{dl}{\lambda} = \lambda_0\frac{dl}{\lambda} = \text{const},$$

so ist — da λ_0, die Vakuumwellenlänge, konstant ist — auch $\frac{dl}{\lambda} = \text{const}$. Nun ist aber λ bei variablem n vom Orte abhängig, so daß dies auch für $dl = \lambda \cdot \text{const}$ gilt.

Aus der Eikonalfunktion lassen sich wichtige Eigenschaften der optischen Abbildung, insbesondere auch der optischen Abbildungsfehler, ableiten. Da das BRUNSsche Eikonal — das ja die Wellenflächen liefert, die zu einem in P befindlichen leuchtenden Punkte gehören, allgemeiner: die Flächen, deren Punkte von P aus konstante vakuumbezogene Lichtwegentfernung besitzen — in der Nähe des zu P konjugierten Bildpunktes P' Singularitäten besitzt, da dort ja die betreffenden Wellenflächen Kanten, Spitzen und Doppelpunkte besitzen oder — im Idealfall der Kugelwelle — auf einen einzelnen Punkt zusammenschrumpfen, so hat sich für die Diskussion der Abbildungsfehler eine andere Funktion, das „SEIDELsche *Eikonal*“, als vorteilhafter erwiesen, das mit

dem BRUNSschen Eikonal in engem Zusammenhang steht. Bevor wir indessen das SEIDELsche Eikonal näher definieren, wollen wir noch einen weiteren Eikonalbegriff, das „*Winkeleikonal*“, einführen, da sich dieses aus dem BRUNSschen Eikonal leichter ableiten läßt als das SEIDELsche, dieses sich aber wieder leicht aus dem Winkeleikonal ergibt[1].

2. Das Winkeleikonal

Wir wählen (Abb. 71) auf der Achse des optischen Systems zwei beliebige Punkte C_0 und C_1 mit den Koordinaten $z = c_0$ bzw. $z = c_1$. P und Q seien zwei beliebige Punkte eines beliebigen, das optische System durchsetzenden Lichtstrahles. Der Wert des zugehörigen BRUNSschen Eikonals sei $E(P, Q)$. Wir fällen nun von C_0 auf den von P ausgehenden — nach den Brechungen durch Q hindurchgehenden — Lichtstrahl ein Lot und ebenso von C_1 aus auf den durch Q gehenden Strahl. Die Fußpunkte seien A_0 und A_1. Das BRUNSsche Eikonal zwischen diesen beiden Fußpunkten ist dann

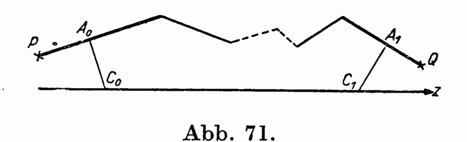


Abb. 71.

$$E(A_0, A_1)\,[= V(P,Q)] = E(P,Q) - n_Q\,[x_Q\,\bar\alpha_Q + y_Q\,\bar\beta_Q + (z_Q - c_1)\,\bar\gamma_Q] + n_P\,[x_P\,\bar\alpha_P + y_P\,\bar\beta_P + (z_P - c_0)\,\bar\gamma_P]\,,$$

da ja PA_0 die Projektion von PC_0 auf den durch P gehenden Lichtstrahl mit den Richtungskosinus $\bar\alpha_P, \bar\beta_P, \bar\gamma_P$ und analog QA_1 die Projektion von QC_1 auf den durch Q gehenden Lichtstrahl mit den Richtungskosinus $\bar\alpha_Q, \bar\beta_Q, \bar\gamma_Q$ ist. $E(A_0, A_1)$ ist also dargestellt als Funktion der Koordinaten der Punkte P und Q, so daß wir es auch als Funktion (V) von P und Q ansprechen können. V ist zunächst Funktion nicht nur der Koordinaten x, y, z der Punkte P und Q, sondern auch der Richtungskosinus $\bar\alpha_P, \bar\beta_P, \bar\gamma_P$ und $\bar\alpha_Q, \bar\beta_Q, \bar\gamma_Q$ des durch P und Q gehenden Lichtstrahles. Nun ändert sich bei Variieren der Punkte P und Q der Wert von $E(P, Q)$ um

$$dE(P,Q) = \frac{\partial E}{\partial x_P}\,dx_P + \frac{\partial E}{\partial y_P}\,dy_P + \frac{\partial E}{\partial z_P}\,dz_P + \frac{\partial E}{\partial x_Q}\,dx_Q + \frac{\partial E}{\partial y_Q}\,dy_Q + \frac{\partial E}{\partial z_Q}\,dz_Q\,. \qquad \text{(XIII 2,1)}$$

Wegen (XIII 1,1) und (XIII 1,2) ist dies

$$dE(P,Q) = -\,n_P\,\bar\alpha_P\,dx_P - n_P\,\bar\beta_P\,dy_P - n_P\,\bar\gamma_P\,dz_P + n_Q\,\bar\alpha_Q\,dx_Q + n_Q\,\bar\beta_Q\,dy_Q + n_Q\,\bar\gamma_Q\,dz_Q\,. \qquad \text{(XIII 2,2)}$$

[1] Wir folgen hier sowie in XIII 2, XIII 3, XIII 5 und XIII 5a dem Vorgehen von K. SCHWARZSCHILD, Untersuchungen zur geometrischen Optik I, Göttingen 1905.

Die zugehörige Änderung von $V(P,Q)$ ist

$$dV(P,Q) = dE(P,Q) - n_Q[\bar{\alpha}_Q\,dx_Q + \bar{\beta}_Q\,dy_Q + \bar{\gamma}_Q\,dz_Q + x_Q\,d\bar{\alpha}_Q + y_Q\,d\bar{\beta}_Q + (z_Q - c_1)\,d\bar{\gamma}_Q] + n_P[\bar{\alpha}_P\,dx_P + \bar{\beta}_P\,dy_P + \bar{\gamma}_P\,dz_P + x_P\,d\bar{\alpha}_P + y_P\,d\bar{\beta}_P + (z_P - c_0)\,d\bar{\gamma}_P],$$

so daß unter Benutzung von (XIII 2,2)

$$dV(P,Q) = -n_Q[x_Q\,d\bar{\alpha}_Q + y_Q\,d\bar{\beta}_Q + (z_Q - c_1)\,d\bar{\gamma}_Q] + n_P[x_P\,d\bar{\alpha}_P + y_P\,d\bar{\beta}_P + (z_P - c_0)\,d\bar{\gamma}_P]. \qquad \text{(XIII 2,3)}$$

Die Funktion $V(P,Q)$ ist also in Wirklichkeit nur abhängig von $\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, \bar{\gamma}_P, \bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q, \bar{\gamma}_Q$, wird also allein durch die Anfangs- und Endrichtung des durch P und Q gegebenen Strahlenverlaufes bestimmt. Tatsächlich sind ja auch zur eindeutigen Festlegung eines *bestimmten* Strahles Anfangs- *und* Endrichtung erforderlich, da alle mit ihm parallel einfallenden Strahlen *gleiche* Anfangsrichtung, im allgemeinen aber *verschiedene* Endrichtung besitzen. Nur in dem speziellen Falle, daß die parallel einfallenden Strahlen auch nach dem Durchgang durch das optische System wieder parallel verlaufen — wie dies z. B. bei einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr der Fall ist —, es sich also um eine sogenannte „teleskopische“ Abbildung handelt, wird $V(P,Q)$ eine unbestimmte Funktion. Aus (XIII 2,3) folgt für die partiellen Ableitungen von $V(P,Q)$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{\alpha}_P} = n_P\,x_P; \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{\beta}_P} = n_P\,y_P; \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{\gamma}_P} = n_P(z_P - c_0); \qquad \text{(XIII 2,4)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{\alpha}_Q} = -n_Q\,x_Q; \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{\beta}_Q} = -n_Q\,y_Q; \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{\gamma}_Q} = -n_Q(z_Q - c_1). \qquad \text{(XIII 2,5)}$$

Ist demnach für ein vorgegebenes optisches System die Funktion

$$V = V(P,Q) = V(\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, \bar{\gamma}_P, \bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q, \bar{\gamma}_Q) \qquad \text{(XIII 2,6)}$$

bekannt, so ergibt sich für einen Lichtstrahl, der im Objektraum durch einen gegebenen Punkt P hindurchgeht und eine gegebene Richtung $(\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, \bar{\gamma}_P)$ hat, aus (XIII 2,4) sofort die Richtung, die er im Bildraum hat, da jene drei Gleichungen ja als Unbekannte nur die Größen $\bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q, \bar{\gamma}_Q$ enthalten, während die Größen $\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, \bar{\gamma}_P, x_P, y_P, z_P$ und c_0 — und natürlich auch n_P und n_Q sowie c_1 — als bekannt angenommen waren. Aus (XIII 2,5) ergeben sich dann noch die Koordinaten desjenigen Punktes unseres Bildstrahles, für den V einen durch (XIII 2,6) bestimmten Wert hat.

Da $\bar{\alpha}_P^2 + \bar{\beta}_P^2 + \bar{\gamma}_P^2 = 1$ und auch $\bar{\alpha}_Q^2 + \bar{\beta}_Q^2 + \bar{\gamma}_Q^2 = 1$ ist, so können wir aus (XIII 2,6) je eine der auf P und Q bezüglichen Variablen, etwa $\bar{\gamma}_P$ und $\bar{\gamma}_Q$, eliminieren. Hierdurch geht $V(P,Q)$ über in eine nur noch von $\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, \bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q$ abhängende Funktion, die wir durch $W(P,Q)$ bezeichnen, so daß

$$W(P,Q) = W(\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, \bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q) \equiv V(\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, \bar{\gamma}_P(\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P), \bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q, \bar{\gamma}_Q(\bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q)), \qquad \text{(XII 2,7)}$$

und es wird wegen (XIII 2,4) (XIII 2,5)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \bar{\beta}_P} &= \frac{\partial V}{\partial \bar{\beta}_P} + \frac{\partial V}{\partial \bar{\gamma}_P}\frac{\partial \bar{\gamma}_P}{\partial \bar{\beta}_P} = n_P\left[y_P - (z_P - c_0)\frac{\bar{\beta}_P}{\bar{\gamma}_P}\right] = n_P\, y_0 \\ \text{und analog}\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{\alpha}_P} &= n_P\left[x_P - (z_P - c_0)\frac{\bar{\alpha}_P}{\bar{\gamma}_P}\right] = n_P\, x_0; \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIII 2,8)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \bar{\beta}_Q} &= -n_Q\left[y_Q - (z_Q - c_1)\frac{\bar{\beta}_Q}{\bar{\gamma}_Q}\right] = -n_Q\, y_1; \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{\alpha}_Q} &= -n_Q\left[x_Q - (z_Q - c_1)\frac{\bar{\alpha}_Q}{\bar{\gamma}_Q}\right] = -n_Q\, x_1, \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIII 2,9)}$$

wo y_0, x_0, y_1, x_1 die Schnittpunktkoordinaten des betreffenden Objekt- und Bildstrahles mit den achsensenkrechten Ebenen $z = c_0$ bzw. $z = c_1$ sind, wie man aus den Definitionsgleichungen sofort erkennt. Denn es ist ja z. B.

$$\frac{y_P - y_0}{z_P - c_0} = \frac{y_P - y_0}{\sqrt{(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2 + (z_P - c_0)^2}} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2 + (z_P - c_0)^2}}{z_P - c_0} = \frac{\bar{\beta}_P}{\bar{\gamma}_P}.$$

Diese Funktion W heißt nach SCHWARZSCHILD das „*Winkeleikonal*" des optischen Systems.

Ist wieder im Objektraum ein Punkt P und die Richtung eines durch ihn hindurchgehenden Lichtstrahles gegeben, so erhält man, wenn $W(P, Q)$ bekannt ist, ebenso wie oben aus (XIII 2,4) bei bekanntem $V(P, Q)$, aus (XIII 2,8) die Richtung des betreffenden Lichtstrahles im Bildraum und aus (XIII 2,9) die Koordinaten des auf diesem Bildstrahl gelegenen Punktes Q, der von P eine bestimmte durch $W(P, Q)$ gegebene (vakuumbezogene) Lichtwegentfernung hat. Die Differentialquotienten (XIII 2,8) und (XIII 2,9) von W geben uns außerdem die Schnittpunkte des objektseitigen und des bildseitigen Strahles mit den im Objektraum bzw. Bildraum gelegenen achsensenkrechten Ebenen $z = c_0$ und $z = c_1$. Da diese beiden Ebenen beliebig wählbar sind, wählt man vorteilhaft hierfür die Objektebene und die GAUSSsche Bildebene.

Es sei noch bemerkt, daß für $V(P, Q)$ und demnach auch für $W(P, Q)$ — beide sind ja im wesentlichen identisch — eine ganz ähnliche Extremaleigenschaft gilt wie für $E(P, Q)$. Dies folgt ohne weiteres daraus, daß ja $V(P, Q)$ und auch $W(P, Q)$ dem Werte nach nichts anderes ist als $E(A_0, A_1)$. Das Winkeleikonal ist daher ein Extremwert der optischen Längen aller durch das optische System (rein geometrisch) legbaren Linienzüge durch A_0 und A_1 mit verschiedener Anfangs- und Endrichtung, wie dies Abb. 72 veranschaulicht.

Zeichnen wir nun (Abb. 73) zu den beiden durch A_0 und A_1 gehenden, einander entsprechenden *Licht*strahlen je eine Parallele und bezeichnen wir die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Loten $\overline{C_0A_0}$ bzw. $\overline{C_1A_1}$ durch B_0 bzw. B_1,

so ist, da ja die Wellenflächen durch A_0 und A_1 die Lote $\overline{C_0A_0}$ bzw. $\overline{C_1A_1}$ in A_0 bzw. A_1 *berühren* (und nicht: schneiden):

$\sum\limits_{A_0}^{B_1} n_j l_j >$ *oder* $=$ *oder* $< E(A_0, A_1)$ für *alle* (A_1 benachbarten) Punkte $B_1 \neq A_1$ auf $\overline{C_1A_1}$,

$\sum\limits_{B_0}^{A_1} n_j l_j >$ *oder* $=$ *oder* $< E(A_0, A_1)$ für *alle* (A_0 benachbarten) Punkte $B_0 \neq A_0$ auf $\overline{C_0A_0}$,

demnach auch, da ja

$$\sum_{B_0}^{B_1} n_j l_j = \sum_{B_0}^{A_1} n_j l_j + \sum_{A_1}^{A_0} n_j l_j + \sum_{A_0}^{B_1} n_j l_j = \sum_{B_0}^{A_1} n_j l_j + \sum_{A_0}^{B_1} n_j l_j - \sum_{A_0}^{A_1} n_j l_j$$

ist, $\sum\limits_{B_0}^{B_1} n_j l_j >$ *oder* $=$ *oder* $< E(A_0, A_1)$ für *alle* (A_0 benachbarten) Punkte $B_0 \neq A_0$ auf $\overline{C_0A_0}$ *und alle* (A_1 benachbarten) Punkte $B_1 \neq A_1$ auf $\overline{C_1A_1}$.

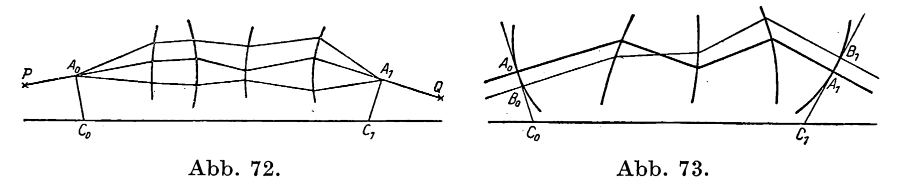


Abb. 72. Abb. 73.

Abb. 72 und 73. Zur Extremaleigenschaft der Winkeleikonale $V(P, Q)$ und $W(P, Q)$.

$E(A_0, A_1)$ und damit auch $V(\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, \bar{\gamma}_P, \bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q, \bar{\gamma}_Q)$ und $W(\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, \bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q)$ sind demnach Extrema unter allen denjenigen geometrisch möglichen Linienzügen durch das optische System, die untereinander gleiche Anfangsrichtung $\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, \bar{\gamma}_P$ und gleiche Endrichtung $\bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q, \bar{\gamma}_Q$ besitzen.

3. Das SEIDELsche Eikonal

Vom Winkeleikonal gehen wir nunmehr über zum SEIDELschen Eikonal. Zu diesem Zwecke wählen wir (Abb. 74) die oben betrachteten Ebenen $z = c_0$ und $z = c_1$ als zueinander optisch konjugierte Ebenen, und zwar die Ebene $z = c_0$ als *Objekt*ebene, die Ebene $z = c_1$ als die ihr im GAUSSschen Sinne, also in den Grenzen der paraxialen Optik konjugierte *Bild*ebene. Außerdem betrachten wir noch zwei weitere, einander — im gleichen Sinne — optisch konjugierte achsensenkrechte Ebenen, die Ebene der Eintrittspupille und die Ebene der Austrittspupille, die ja das objektseitige bzw. bildseitige Bild der Blenden sind. Den Abstand der Objektebene von der Ebene der EP bezeichnen

wir durch m_0, den Abstand der Bildebene von der Ebene der AP durch m_1. In unserer früheren Bezeichnungsweise ist also $m_0 = s - \mathring{s}$ und $m_1 = s' - \mathring{s}'$. Ferner sei der paraxiale Abbildungsmaßstab zwischen Bild- und Objektebene durch $\frac{l'}{l}$ $(= \beta')$, der zwischen AP und EP durch $\frac{\mathring{l}'}{\mathring{l}}$ $(= \mathring{\beta}')$ bezeichnet, so daß jetzt l' die Größe des Bildes (in der Bildebene) eines kleinen achsensenkrechten

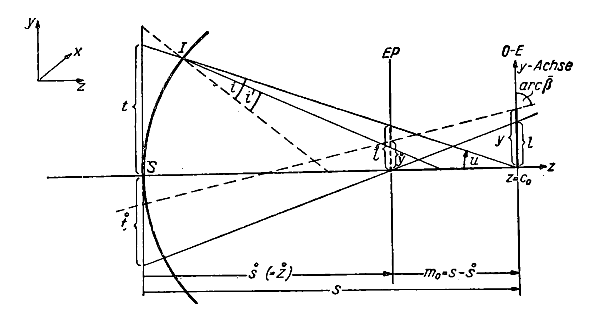


Abb. 74. Zur Ableitung des SEIDELschen Eikonals. (Eingezeichnet wurden nur die sich auf den „objektseitigen" Strahlverlauf beziehenden Größen und dementsprechend nur die Lage der Objektebene sowie der EP-Ebene.)

Objektes der Größe l in der Objektebene[1] und $\mathring{l}'$ die Bildgröße (in der AP) eines kleinen achsensenkrechten Objektes der Größe $\mathring{l}$ in der Ebene der EP ist[2]. Nach der HELMHOLTZ-LAGRANGEschen Formel ist dann — da

$$\frac{\mathring{l}}{m_0} = \operatorname{tg} u \approx u \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathring{l}'}{m_1} = \operatorname{tg} u' \approx u'$$

ist —

$$\frac{n\, l\, \mathring{l}}{m_0} = \frac{n'\, l'\, \mathring{l}'}{m_1} = K. \tag{XIII 3,1}$$

Bezeichnen wir von jetzt ab die Schnittpunktkoordinaten y_0, x_0 des objektseitigen Strahls mit der Ebene $z = c_0$, unserer jetzigen *Objekt*ebene, durch y, x, diejenigen des zugeordneten bildseitigen Strahls mit der Ebene $z = c_1$, der jetzigen Bildebene, durch y', x', ferner die Schnittpunktkoordinaten des objektseitigen Strahls mit der EP-Ebene durch $\mathring{y}$, $\mathring{x}$, die des bildseitigen Strahls mit der AP-Ebene durch $\mathring{y}'$, $\mathring{x}'$, so ist in den Grenzen der GAUSSschen Optik, also bei Vernachlässigung höherer Potenzen der Neigungswinkel der Strahlen

---

[1] „l, l'" sollen jetzt also *nicht mehr* die Längen der Lichtwege, gemessen längs der Strahlen, bezeichnen.

[2] Eine Verwechslung der „Abbildungsmaßstäbe", der lateralen Vergrößerungen, β' und $\mathring{\beta}'$ mit den *Richtungskosinus*werten β und β' der Strahlen im Objekt- bzw. Bildraum ist wohl nicht zu befürchten.

gegen die Achse — es ist ja $\bar\beta = \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \approx \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ usw. — ,

$$\begin{aligned} \mathring{y} &= y - m_0\,\bar\beta; & \mathring{x} &= x - m_0\,\bar\alpha, \\ \mathring{y}' &= y' - m_1\,\bar\beta'; & \mathring{x}' &= x' - m_1\,\bar\alpha'. \end{aligned} \qquad \text{(XIII 3,2)}$$

Durch Einführung zweckentsprechender, für *Objektebene* und *Bildebene* — und ebenso für EP-Ebene und AP-Ebene — *verschiedener* Maßeinheiten können wir erreichen, daß die Werte der Koordinaten des Bildpunktes bei idealer, also *fehlerfreier* Abbildung die gleichen sind wie die des Objektpunktes und daß auch die Koordinatenwerte der Strahlschnittpunkte mit der AP-Ebene die gleichen sind wie diejenigen ihrer objektseitigen Schnittpunkte mit der EP-Ebene — wieder fehlerfreier Strahlverlauf vorausgesetzt. Die in diesen zweckentsprechend gewählten Maßeinheiten gemessenen Koordinatenwerte bezeichnen wir durch $\hat y$, $\hat x$, $\hat y'$, $\hat x'$, $\hat{\mathring{y}}$, $\hat{\mathring{x}}$, $\hat{\mathring{y}}'$, $\hat{\mathring{x}}'$, und zwar setzen wir mit (XIII 3,1)

$$\hat y = \frac{y}{l}K; \quad \hat x = \frac{x}{l}K; \quad \hat{\mathring{y}} = \frac{\mathring{y}}{\mathring{l}}K = \frac{y - m_0\,\bar\beta}{\mathring{l}}K; \quad \hat{\mathring{x}} = \frac{x - m_0\,\bar\alpha}{\mathring{l}}K,$$

$$\text{(XIII 3,3)}$$

$$\hat y' = \frac{y'}{l'}K; \quad \hat x' = \frac{x'}{l'}K; \quad \hat{\mathring{y}}' = \frac{\mathring{y}'}{\mathring{l}'}K = \frac{y' - m_1\,\bar\beta'}{\mathring{l}'}K; \quad \hat{\mathring{x}}' = \frac{x' - m_1\,\bar\alpha'}{\mathring{l}'}K$$

mit
$$K = \frac{n\,l\,\mathring{l}}{m_0} = \frac{n'\,l'\,\mathring{l}'}{m_1}.$$

Bei *idealem* Strahlverlauf wäre also $\hat y' = \hat y$, $\hat x' = \hat x$, $\hat{\mathring{y}}' = \hat{\mathring{y}}$, $\hat{\mathring{x}}' = \hat{\mathring{x}}$. Die Differenzen $\hat y' - \hat y$, $\hat x' - \hat x$, $\hat{\mathring{y}}' - \hat{\mathring{y}}$, $\hat{\mathring{x}}' - \hat{\mathring{x}}$ geben also die „Fehler", die durch die Abweichungen vom idealen, vom GAUSSschen Strahlverlauf bedingt sind, in der Bildebene bzw. der AP-Ebene, allerdings in der für diese betreffenden Ebenen geltenden Maßeinheit.

Aus (XIII 3,3) folgt noch mit Berücksichtigung von (XIII 3,2)

$$y = \hat y\,\frac{m_0}{n\,\mathring{l}}; \quad x = \hat x\,\frac{m_0}{n\,\mathring{l}}; \quad \bar\beta = -\frac{\hat{\mathring{y}}}{n\,l} + \frac{\hat y}{n\,\mathring{l}}; \quad \bar\alpha = -\frac{\hat{\mathring{x}}}{n\,l} + \frac{\hat x}{n\,\mathring{l}},$$

$$\text{(XIII 3,3a)}$$

$$y' = \hat y'\,\frac{m_1}{n'\,\mathring{l}'}; \quad x' = \hat x'\,\frac{m_1}{n'\,\mathring{l}'}; \quad \bar\beta' = -\frac{\hat{\mathring{y}}'}{n'\,l'} + \frac{\hat y'}{n'\,\mathring{l}'}; \quad \bar\alpha' = -\frac{\hat{\mathring{x}}'}{n'\,l'} + \frac{\hat x'}{n'\,\mathring{l}'}.$$

Setzen wir dies in die für das Winkeleikonal nach (XIII 2,8) und (XIII 2,9) geltende Differentialgleichung unter Berücksichtigung der jetzt benutzten Bezeichnungen

$$y, x, y', x', n, n', \bar\beta, \bar\beta' \quad \text{statt} \quad y_0, x_0, y_1, x_1, n_P, n_Q, \bar\beta_P, \bar\beta_Q,$$

also in

$$dW(P, Q) = -\,n'(y'\,d\bar\beta' + x'\,d\bar\alpha') + n\,(y\,d\bar\beta + x\,d\bar\alpha)$$

ein, so erhalten wir

$$dW(P,Q) = +\frac{m_0}{2\mathring{l}^2}\frac{1}{n}\,d(\hat{y}^2+\hat{x}^2) - \frac{m_1}{2\mathring{l}'^2}\frac{1}{n'}\,d(\hat{y}'^2+\hat{x}'^2)$$

$$-\frac{m_0}{n\,l\,\mathring{l}}(\hat{y}\,d\hat{\mathring{y}}+\hat{x}\,d\hat{\mathring{x}}) + \frac{m_1}{n'\,l'\,\mathring{l}'}(\hat{y}'\,d\hat{\mathring{y}}'+\hat{x}'\,d\hat{\mathring{x}}'),$$

$$dW(PQ) = +\frac{m_0}{2\mathring{l}^2}\frac{1}{n}\,d(\hat{y}^2+\hat{x}^2) - \frac{m_1}{2\mathring{l}'^2}\frac{1}{n'}\,d(\hat{y}'^2+\hat{x}'^2)$$

$$-\frac{1}{K}\{(\hat{\mathring{y}}'-\hat{\mathring{y}})\,d\hat{y} + (\hat{\mathring{x}}'-\hat{\mathring{x}})\,d\hat{x} + (\hat{y}-\hat{y}')\,d\hat{\mathring{y}}'$$

$$+(\hat{x}-\hat{x}')\,d\hat{\mathring{x}}' - d[\hat{y}(\hat{\mathring{y}}'-\hat{\mathring{y}}) + \hat{x}(\hat{\mathring{x}}'-\hat{\mathring{x}})]\}.$$

Wir definieren nun als SEIDELsches Eikonal die Funktion

$$S(P,Q) = -W(P,Q) + \frac{m_0}{2\mathring{l}^2}\frac{1}{n}(\hat{y}^2+\hat{x}^2) - \frac{m_1}{2\mathring{l}'^2}\frac{1}{n'}(\hat{y}'^2+\hat{x}'^2)$$

$$+\frac{1}{K}[\hat{y}(\hat{\mathring{y}}'-\hat{\mathring{y}}) + \hat{x}(\hat{\mathring{x}}'-\hat{\mathring{x}})]. \qquad \text{(XIII 3,4)}$$

Dann wird

$$dS(P,Q) = \frac{1}{K}[(\hat{\mathring{y}}'-\hat{\mathring{y}})\,d\hat{y} + (\hat{\mathring{x}}'-\hat{\mathring{x}})\,d\hat{x} + (\hat{y}-\hat{y}')\,d\hat{\mathring{y}}' + (\hat{x}-\hat{x}')\,d\hat{\mathring{x}}'].$$

Das SEIDELsche Eikonal ist also nur Funktion von $\hat{y}$, $\hat{x}$, $\hat{\mathring{y}}'$, $\hat{\mathring{x}}'$, also von den Koordinaten des Objektpunktes und den Koordinaten des Schnittpunktes des betrachteten Strahles mit der AP-Ebene. Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial\hat{y}} &= \frac{1}{K}(\hat{\mathring{y}}'-\hat{\mathring{y}}) = \frac{\mathring{y}'}{\mathring{l}'} - \frac{\mathring{y}}{\mathring{l}};\\
\frac{\partial S}{\partial\hat{x}} &= \frac{1}{K}(\hat{\mathring{x}}'-\hat{\mathring{x}}) = \frac{\mathring{x}'}{\mathring{l}'} - \frac{\mathring{x}}{\mathring{l}};\\
\frac{\partial S}{\partial\hat{\mathring{y}}'} &= -\frac{1}{K}(\hat{y}'-\hat{y}) = -\left(\frac{y'}{l'} - \frac{y}{l}\right);\\
\frac{\partial S}{\partial\hat{\mathring{x}}'} &= -\frac{1}{K}(\hat{x}'-\hat{x}) = -\left(\frac{x'}{l'} - \frac{x}{l}\right).
\end{aligned} \qquad \text{(XIII 3,4a)}$$

Die partiellen Ableitungen von S nach den Koordinaten des Objektpunktes geben also die Abweichungen der Koordinaten des Strahlschnittpunktes mit der AP-Ebene von den idealen, d. h. den sich nach der GAUSSschen Optik ergebenden Koordinaten jenes Strahlschnittpunktes. Und ebenso ergeben die negativen partiellen Ableitungen von S nach den Koordinaten des Strahlschnittpunktes mit der EP-Ebene die Abweichungen der Koordinaten des Strahlschnittpunktes mit der der Objektebene konjugierten Bildebene.

Setzen wir noch — was ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit geschehen kann — die Größe $\mathring{l}$ gleich 1, so ist $l' = \beta'$. Ferner setzen wir

$$\mathring{l} = \frac{s-\mathring{s}}{s}\,t,$$

worin t den Achsenabstand desjenigen Punktes der Tangentialebene im Scheitel der ersten Fläche des optischen Systems bedeutet, in dem der vom Achsenpunkt des Objektes ausgehende, die EP-Ebene im Achsenabstand $\mathring{l}$ durchsetzende Strahl diese Tangentialebene trifft. Die Formeln (XIII 3,4a) gehen dadurch — wenn wir noch beachten, daß $\beta' y$ der *fehlerfreie* Wert von y' und $\beta' \mathring{y}$ der *fehlerfreie* Wert von $\mathring{y}'$ ist — über in

$$\frac{\partial S}{\partial \mathring{y}} = \frac{1}{\mathring{l}\beta'}(\mathring{y}' - \beta' \mathring{y}) = \frac{1}{\beta'}(\triangle \mathring{y}')_{\text{mer}} \cdot \frac{s}{(s-\mathring{s})\,t}; \qquad \text{(XIII 3,5)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mathring{x}} = \frac{1}{\mathring{l}\beta'} \triangle \mathring{x} = \frac{1}{\beta'}(\triangle \mathring{y}')_{\text{sag}} \cdot \frac{s}{(s-\mathring{s})\,t},$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mathring{y}'} = -\frac{1}{\beta'}(\triangle y')_{\text{mer}}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \mathring{x}'} = -\frac{1}{\beta'}(\triangle y')_{\text{sag}} \qquad \text{(XIII 3,6)}$$

in unseren früheren Bezeichnungen.

4. Beziehungen zwischen dem Eikonal und den Abbildungsgesetzen

Um nun vom Eikonalbegriff aus einen Überblick über die verschiedenen, bei einem optischen System möglichen Fehler zu erhalten, haben wir die Eikonalfunktion nach den unabhängigen Variablen zu entwickeln. Geschieht dies mit dem Winkeleikonal $W = W(P, Q) = W(\bar{\beta}_P, \bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_Q, \bar{\alpha}_Q)$ und setzen wir voraus, daß das zu untersuchende optische System rotationssymmetrisch und isotrop oder doch wenigstens zu jeder durch die Achse der Rotationssymmetrie gelegten Ebene spiegelsymmetrisch ist, so können die Variablen $\bar{\beta}_P, \bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_Q, \bar{\alpha}_Q$ nur in den Verbindungen

$$\bar{\beta}_P^2 + \bar{\alpha}_P^2 = B_0^2; \qquad \bar{\beta}_Q^2 + \bar{\alpha}_Q^2 = B_1^2; \qquad \bar{\beta}_P \bar{\beta}_Q + \bar{\alpha}_P \bar{\alpha}_Q = B_{01}^2$$

auftreten.

Denn betrachten wir $\bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P$ als mathematische Größen, und zwar als die Komponenten eines (zweidimensionalen) Vektors $\mathfrak{p}$, und $\bar{\alpha}_Q, \bar{\beta}_Q$ als die Komponenten eines vom gleichen Anfangspunkt ausgehenden (zweidimensionalen) Vektors $\mathfrak{q}$ der gleichen Ebene, so ist W Funktion der Lage der Endpunkte der beiden Vektoren. Da wir Rotationssymmetrie des optischen Systems vorausgesetzt haben, ist für den Wert der Funktion W nicht die Lage der beiden durch die Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gegebenen Punkte selbst maßgebend, sondern nur ihre Abstände $|\mathfrak{p}|$ und $|\mathfrak{q}|$ vom gemeinsamen Anfangspunkt sowie ihre gegenseitige Lagebeziehung, ihre „Lage zueinander“. Diese „Lage zueinander“ ist eindeutig durch das skalare Produkt $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q})$ und durch das Vektorprodukt $[\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}]$ bestimmt, von denen wegen der vorausgesetzten Isotropie bzw. Spiegel-

symmetrie sogar eins allein ausreicht, während ihre Abstände vom gemeinsamen Anfangspunkt der Vektoren durch $|\mathfrak{p}|$ und $|\mathfrak{q}|$ gegeben sind. Nun ist

$$|\mathfrak{p}|^2 = \bar{\alpha}_P^2 + \bar{\beta}_P^2\,; \qquad |\mathfrak{q}|^2 = \bar{\alpha}_Q^2 + \bar{\beta}_Q^2\,,$$

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = \bar{\alpha}_P\,\bar{\alpha}_Q + \bar{\beta}_P\,\bar{\beta}_Q\,; \qquad |[\mathfrak{p}\mathfrak{q}]| = \bar{\alpha}_P\,\bar{\beta}_Q - \bar{\alpha}_Q\,\bar{\beta}_P\,,$$

von denen also in unserem Falle drei Ausdrücke ausreichen, z. B. $|\mathfrak{p}|$, $|\mathfrak{q}|$, $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q})$ oder auch $|\mathfrak{p}|$, $|\mathfrak{q}|$, $|[\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}]|$ oder $|\mathfrak{p}|$, $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q})$, $|[\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}]|$ oder endlich $|\mathfrak{q}|$, $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q})$, $|[\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}]|$. Wir haben hier das erste der angegebenen Tripel, also $|\mathfrak{p}|$, $|\mathfrak{q}|$, $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{q})$, gewählt.

B_{01} bezeichnet den Kosinus des Winkels, den die Projektionen der zu P und Q gehörigen Radienvektoren auf die yx-Ebene miteinander bilden.

Fassen wir nun alle Glieder *gleicher* Dimension (gleicher Potenzsumme der Variablen $\bar{\beta}_P, \bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_Q, \bar{\alpha}_Q$) zu einem *Teil*ausdruck, zu einer *Teil*funktion zusammen, so erhalten wir für W eine Entwicklung der Form

$$W = W^{(0)} + W^{(2)} + W^{(4)} + \cdots, \qquad \text{(XIII 4,1)}$$

wo die oben angefügten Indizes die Dimension der einzelnen Teilfunktionen angeben. Für $W^{(2)}$ erhalten wir z. B. explizit

$$W^{(2)} = a_0\,B_0^2 + a_1\,B_1^2 + a_{01}\,B_{01}^2\,,$$

wo a_0, a_1, a_{01} Koeffizienten sind, die sich aus den Daten des optischen Systems und der Lage des Objektes berechnen lassen, uns hier aber nicht interessieren. Vernachlässigen wir in der Entwicklung von W alle höheren Potenzen, setzen also

$$W = W^{(0)} + W^{(2)},$$

so ergeben sich aus (XIII 2,8) und (XIII 2,9) die Gesetze der GAUSSschen Optik. Wir zeigen dies an einem *Beispiel.* Es wird nach (XIII 2,8) bzw. (XIII 2,9)

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\beta}_P} = \frac{\partial W^{(2)}}{\partial \bar{\beta}_P} = 2\,a_0\,\bar{\beta}_P + a_{01}\,\bar{\beta}_Q = n_P\,y_0\,; \qquad \frac{\partial W}{\partial \bar{\beta}_Q} = 2\,a_1\,\bar{\beta}_Q + a_{01}\,\bar{\beta}_P = -\,n_Q\,y_1,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\alpha}_P} = 2\,a_0\,\bar{\alpha}_P + a_{01}\,\bar{\alpha}_Q = n_P\,x_0\,; \qquad \frac{\partial W}{\partial \bar{\alpha}_Q} = 2\,a_1\,\bar{\alpha}_Q + a_{01}\,\bar{\alpha}_P = -\,n_Q\,x_1.$$

Wir wählen nun als Ebenen $z = c_0$; $z = c_1$ die Objekt- und GAUSSsche Bildebene und betrachten in der Objektebene ein kleines achsensenkrechtes Linienelement, das mit der y_0-Achse zusammenfalle, für das also $x_0 = 0$ ist. Dann folgt zunächst aus den vorstehenden Gleichungen

$$\bar{\alpha}_Q = -\,\frac{2\,a_0}{a_{01}}\,\bar{\alpha}_P\,,$$
$$\bar{\beta}_Q = \frac{n_P\,y_0}{a_{01}} - \frac{2\,a_0}{a_{01}}\,\bar{\beta}_P\,. \qquad \text{(XIII 4,2)}$$

Ferner wird

$$y_1 = -\,\frac{n_P}{n_Q}\,\frac{2\,a_1}{a_{01}}\,y_0 + \frac{4\,a_0\,a_1 - a_{01}^2}{n_Q\,a_{01}}\,\bar{\beta}_P\,; \qquad x_1 = \frac{4\,a_0\,a_1 - a_{01}^2}{n_Q\,a_{01}}\,\bar{\alpha}_P\,.$$

Da nun die Ebene $z = c_1$ die zu $z = c_0$ konjugierte Bildebene sein soll, so muß y_1, x_1 von der Neigung des objektseitigen Strahles, also von $\bar{\beta}_P$, $\bar{\alpha}_P$ unabhängig sein. Daraus folgt zunächst:

$$4a_0\, a_1 - a_{01}^2 = 0\,; \qquad a_{01} = 2\sqrt{a_0\, a_1}\,. \tag{XIII 4,3}$$

Hiermit wird

$$y_1 = -\frac{n_P}{n_Q}\sqrt{\frac{a_1}{a_0}}\, y_0\,; \qquad x_1 = 0 \tag{XIII 4,4}$$

$$W^{(2)} = a_0 B_0^2 + a_1 B_1^2 + 2\sqrt{a_0\, a_1}\, B_{01}\,.$$

Als erste Folgerung für die GAUSSsche Optik erhalten wir also: Das Bild liegt in der gleichen Meridianebene wie das Objekt.

Ferner wird nach (XIII 4,2_1)

$$\bar{\alpha}_Q = -\sqrt{\frac{a_0}{a_1}}\,\bar{\alpha}_P\,,$$

so daß

$$n_Q\,\bar{\alpha}_Q\, y_1 = n_P\,\bar{\alpha}_P\, y_0\,. \tag{XIII 4,5}$$

Aus (XIII 4,2_2) erhalten wir unter Berücksichtigung von (XIII 4,3) und (XIII 4,4)

$$n_Q\,\bar{\beta}_Q\, y_1 = \frac{n_P\, n_Q}{2\sqrt{a_0\, a_1}}\, y_0\, y_1 - \frac{2\, a_0\, n_Q}{2\sqrt{a_0\, a_1}}\, y_1\,\bar{\beta}_P$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{n_P\, y_0}{\sqrt{a_0}}\right)^2 + n_P\,\bar{\beta}_P\, y_0\,.$$

Haben wir es nun mit einem *kleinen* achsensenkrechten Objekt $d y_0$ zu tun, so können wir $-\frac{1}{2}\left(\frac{n_P\, y_0}{\sqrt{a_0}}\right)^2$ vernachlässigen und erhalten $n_Q\,\bar{\beta}_Q\, d y_1 = n_P\,\bar{\beta}_P\, d y_0$. Hieraus und aus (XIII 4,5) folgt

$$n_Q\sqrt{\bar{\beta}_Q^2 + \bar{\alpha}_Q^2}\, d y_1 = n_P\sqrt{\bar{\beta}_P^2 + \bar{\alpha}_P^2}\, d y_0$$

oder in der früheren Bezeichnungsweise, da $\bar{\beta}_P^2 + \bar{\alpha}_P^2 = 1 - \bar{\gamma}_P^2 = \sin^2\gamma_P \approx \gamma_P^2 = u^2$ und entsprechend $\bar{\beta}_Q^2 + \bar{\alpha}_Q^2 \approx u'^2$ ist

$$n'\, u'\, d y' = n\, u\, d y\,.$$

Dies ist die HELMHOLTZsche Gleichung. Sie gilt nur unter der Voraussetzung, daß das Objekt genügend klein ist, und zwar nicht nur für die in der Meridianebene verlaufenden Strahlen, sondern für alle Strahlen, also insbesondere auch für die in der Sagittalebene verlaufenden Strahlen, wie aus (XIII 4,5) folgt.

In ähnlicher Art lassen sich noch weitere Formeln der GAUSSschen Optik ableiten. Wir gehen hierauf nicht näher ein.

Berücksichtigen wir in der Entwicklung von W noch $W^{(4)}$, so erhalten wir nach (XIII 3,7) durch Differentiation nach $\bar{\beta}_P$, $\bar{\alpha}_P$, $\bar{\beta}_Q$, $\bar{\alpha}_Q$ Gleichungen, die

jene Größen in der dritten Potenz enthalten. Aus diesen Gleichungen ergeben sich so die Abweichungen 3. Ordnung gegen die Werte der GAUSSschen Optik, d. h. die „Fehler 3. Ordnung“.

5. Die Bildfehler 3. Ordnung

Diese Fehler 3. Ordnung wollen wir aber nicht im Anschluß an das Winkeleikonal, sondern mit Benutzung des SEIDELschen Eikonals ableiten. Für dieses gilt zunächst gleichfalls, daß in ihm nur gerade Potenzen der unabhängigen Variablen $\hat{y}, \hat{x}, \mathring{y}', \mathring{x}'$ auftreten können, und zwar wieder nur in den Verbindungen

$$\hat{y}^2 + \hat{x}^2 = \hat{\varrho}^2; \quad \mathring{y}'^2 + \mathring{x}'^2 = \mathring{\varrho}'^2; \quad \hat{y}\mathring{y}' + \hat{x}\mathring{x}' = \hat{\eta}^2 \text{ [1]}. \qquad \text{(XIII 5,1}_1\text{)}$$

Wegen der vorausgesetzten Rotationssymmetrie können wir — ohne weitere Einschränkung der Allgemeingültigkeit — das Objekt als in der yz-Ebene liegend annehmen, d. h. das Koordinatensystem so wählen, daß die y-Achse mit der Richtung des linearen achsensenkrechten Objekts der Objektebene gleichgerichtet ist. Dann ist $\hat{x} = 0$ zu setzen, und wir haben als unabhängige Variable

$$[\text{mit } \mathring{y}' = \mathring{\varrho}' \cos \mathring{\psi}' \text{ und } \mathring{x}' = \mathring{\varrho}' \sin \mathring{\psi}']$$

$$\hat{y}^2; \; \mathring{y}'^2 + \mathring{x}'^2 = \mathring{\varrho}'^2; \quad \hat{y}\,\mathring{y}' = \hat{y}\,\mathring{\varrho}' \cos \mathring{\psi}' = \hat{\eta}^2. \qquad \text{(XIII 5,1)}$$

Entwickeln wir S nach diesen Größen und fassen wir wieder die Glieder gleicher Dimension zusammen, so erhalten wir

$$S = S^{(0)} + S^{(2)} + S^{(4)} + \cdots.$$

Nun ist im Bereiche der GAUSSschen Optik $\hat{y} = \hat{y}', \hat{x} = \hat{x}', \mathring{y} = \mathring{y}', \mathring{x} = \mathring{x}'$. Nach (XIII 3,4a) muß also $S^{(2)} = 0$ werden. Als allgemeine Entwicklung von S erhalten wir daher

$$S = S^{(0)} + S^{(4)} + S^{(6)} + \cdots.$$

$S^{(4)}$ liefert nach (XIII 3,4a) die Fehler 3. Ordnung. Da $S^{(4)}$ von den Variablen $\hat{y}, \hat{x}, \mathring{y}', \mathring{x}'$ nur in 4. Potenz abhängt, so läßt sich $S^{(4)}$ nach (XIII 5,1) in der Form schreiben

$$S^{(4)} = -\frac{1}{4} A\,\hat{y}^4 - \frac{1}{4} B\,\mathring{\varrho}'^4 - C\,\hat{\eta}^4 - \frac{1}{2} D\,\hat{y}^2\,\mathring{\varrho}'^2 + E\,\hat{y}^2\,\hat{\eta}^2 + F\,\mathring{\varrho}'^2\,\hat{\eta}^2. \qquad \text{(XIII 5,2)}$$

Die Zahlenfaktoren, die wir den Koeffizienten der Reihenentwicklung hinzugefügt haben, sind im Hinblick auf die späteren Ergebnisse zweckentsprechend gewählt.

---

[1] Wir schreiben $\hat{\eta}^2$ — obwohl $\hat{y}\mathring{y}' + \hat{x}\mathring{x}'$ auch negativ sein kann —, um anzudeuten, daß es sich um eine Größe zweiter Ordnung handelt. η selbst kann also auch imaginär sein.

Aus (XIII 5,2) erhalten wir nun mit (XIII 3,6)

$$\frac{(\triangle y')_{\mathrm{mer}}}{\beta'} = -\frac{\partial S^{(4)}}{\partial \mathring{y}'} = -\frac{\partial S^{(4)}}{\partial \mathring{\varrho}'}\,\frac{\partial \mathring{\varrho}'}{\partial \mathring{y}'} - \frac{\partial S^{(4)}}{\partial (\mathring{\eta}^2)}\,\frac{\partial (\mathring{\eta}^2)}{\partial \mathring{y}'}$$

$$= B\,\mathring{\varrho}'^3 \cdot \frac{\mathring{y}'}{\mathring{\varrho}'} + D\,\mathring{\varrho}'\,\frac{\mathring{y}'}{\mathring{\varrho}'}\,\mathring{y}^2 - 2F\,\mathring{\varrho}'\,\frac{\mathring{y}'}{\mathring{\varrho}'}\,\mathring{\eta}^2 - E\,\mathring{y}^2\,\mathring{y}$$

$$- F\,\mathring{\varrho}'^2\,\mathring{y} + 2C\,\mathring{\eta}^2\,\mathring{y}$$

$$= B\,\mathring{\varrho}'^3 \cos\mathring{\psi}' + D\,\mathring{\varrho}'\,\mathring{y}^2 \cos\mathring{\psi}' - 2F\,\mathring{\varrho}'^2\,\mathring{y}\cos^2\mathring{\psi}' - E\,\mathring{y}^3$$

$$- F\mathring{\varrho}'^2\,\mathring{y} + 2C\,\mathring{y}^2\,\mathring{\varrho}'\cos\mathring{\psi}'$$

$$= B\,\mathring{\varrho}'^3 \cos\mathring{\psi}' + D\,\mathring{\varrho}'\,\mathring{y}^2\cos\mathring{\psi}' - F\,\mathring{\varrho}'^2\,\mathring{y}\,(2+\cos 2\mathring{\psi}')$$

$$+ 2C\,\mathring{y}^2\,\mathring{\varrho}'\cos\mathring{\psi}' - E\,\mathring{y}^2. \qquad \text{(XIII 5,3)}$$

Setzen wir hier nach (XIII 3,3a) für $\mathring{y}$ — indem wir wie in (XIII 3,5) $\mathring{l} = \frac{s - \mathring{s}}{s}\,t$ und $m_0 = s - \mathring{s}$ setzen — den Wert

$$\mathring{y} = \frac{n\,\mathring{l}}{m_0}\,y = \frac{n}{s}\,t\,y\,; \qquad \mathring{x} = \frac{n}{s}\,t\,x \qquad \text{(XIII 5,4)}$$

und für $\mathring{\varrho}' = \sqrt{\mathring{y}'^2 + \mathring{x}'^2}$ nach (XIII 3,3) die Größe $\frac{n}{m_0}\,\mathring{\varrho} = \frac{n}{s - \mathring{s}}\,\mathring{\varrho}$, wo — wie in (XIII 3,6) — wieder $l = 1$ gesetzt wurde, ferner $\mathring{\psi}' = \mathring{\psi}' = \mathring{\psi}$, so erhalten wir

$$\frac{(\triangle y')_{\mathrm{mer}}}{\beta'} = \frac{n^3}{(s-\mathring{s})^3}\,\mathring{\varrho}^3 \cos\mathring{\psi}\cdot B + \frac{n^3\,t^2}{(s-\mathring{s})\,s^2}\,\mathring{\varrho}\,y^2\cos\mathring{\psi}\cdot(2C + D)$$

$$- \frac{n^3\,t}{(s-\mathring{s})^2\,s}\,\mathring{\varrho}^2\,y\,(2 + \cos 2\mathring{\psi})\cdot F - \frac{n^3\,t^3}{s^3}\,y^3\cdot E\,. \qquad \text{(XIII 5,3a)}$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem in Abschnitt VI, S. 71 erhaltenen Ausdruck (VI 1, 2 m) — angewandt auf ein Einzelsystem bzw. eine einzelne (brechende) Fläche — *dann* überein, *wenn*

$$B = -\frac{1}{2}\,\frac{s^4}{n^4}\cdot I_1\,,$$

$$F = \frac{1}{2}\,\frac{s^3}{n^3}\cdot\frac{1}{t}\cdot II_1\,,$$

$$2C + D = -\frac{1}{2}\,\frac{s^2}{n^2}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot III_1\,, \qquad \text{(XIII 5,5 } y\text{)}$$

$$E = \frac{1}{2}\,\frac{s}{n}\,\frac{1}{t^3}\cdot V_1\,.$$

Für $\frac{(\triangle y')_{\mathrm{sag}}}{\beta'}$ ergibt sich aus (XIII 5,2) mit (XIII 3,6) entsprechend

$$\frac{(\triangle y')_{\mathrm{sag}}}{\beta'} = -\frac{\partial S^{(4)}}{\partial \mathring{x}'} = B\,\mathring{\varrho}'^3 \sin\mathring{\psi}' + D\,\mathring{\varrho}'\,\mathring{y}^2 \sin\mathring{\psi}' - F\,\mathring{\varrho}'^2\,\mathring{y}\sin 2\mathring{\psi}'. \qquad \text{(XIII 5,6a)}$$

Entsprechend der Umformung von (XIII 5,3) in (XIII 5,3a) geht (XIII 5,6) über in

$$\frac{(\triangle y')_{\text{sag}}}{\beta'} = \frac{n^3}{(s-\mathring{s})^3}\,\mathring{\varrho}^3 \sin\mathring{\psi}\cdot B + \frac{n^3\,t^2}{s^2\,(s-\mathring{s})}\,\mathring{\varrho}\,y^2 \sin\mathring{\psi}\cdot D - \frac{n^3\,t}{s\,(s-\mathring{s})^2}\,\mathring{\varrho}^2\,y \sin 2\,\mathring{\psi}\cdot F \qquad \text{(XIII 5,6)}$$

ein Ausdruck, der wieder mit dem in Abschnitt VI, S. 71 für $\frac{(\triangle y')_{\text{sag}}}{\beta'}$ erhaltenen Ausdruck (VI 1,2s) — angewandt auf ein Einzelsystem bzw. eine einzelne (brechende) Fläche — übereinstimmt, wenn

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2}\frac{s^4}{n^4}\cdot I_1\,,\\ F &= \frac{1}{2}\frac{s^3}{n^3}\cdot\frac{1}{t}\cdot II_1\,,\\ D &= -\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot IV_1\,. \end{aligned} \qquad \text{(XIII 5,5}\,x)$$

5a. Bildfehler eines aus mehreren Teilsystemen zusammengesetzten Systems

Doch bevor wir dies untersuchen, wollen wir uns noch einer anderen Frage zuwenden und zeigen, daß die Benutzung des SEIDELschen Eikonals gegenüber den übrigen Eikonalen den wesentlichen Vorteil besitzt, daß sich mit seiner Hilfe die Fehler eines optischen Systems, das aus mehreren Teilsystemen (brechenden oder spiegelnden Flächen) besteht, sehr einfach aus denjenigen der einzelnen Teilsysteme selbst zusammensetzen lassen, wenigstens solange wir uns auf die Fehler 3. Ordnung beschränken.

Haben wir es z. B. mit zwei Einzelsystemen zu tun, so werde die (paraxiale) Bildebene des ersten Systems (mit $z = c_1$) sowie seine AP-Ebene ($z = c_1 + m_1$) durch das zweite System abgebildet in $z = c_2$ bzw. $z = c_2 + m_2$. Diese beiden Ebenen sind dann die (paraxiale) Bildebene bzw. die AP-Ebene des aus System 1 und System 2 bestehenden Gesamtsystems.

Bezeichnen wir nun mit W_1 das Winkeleikonal des ersten, mit W_2 das des zweiten und mit W das des Gesamtsystems und entsprechend mit S_1, S_2 und S das SEIDELsche Eikonal des ersten, des zweiten und des Gesamtsystems, so gilt nach der Definition (XIII 3,4) des SEIDELschen Eikonals

$$S_1 = -W_1 + \frac{m_{10}}{n_1}\frac{\hat{y}_1^2+\hat{x}_1^2}{2\,\mathring{l}_1^2} - \frac{m_{11}}{n_1'}\frac{\hat{y}_1'^2+\hat{x}_1'^2}{2\,\mathring{l}_1'^2} + [\hat{y}_1(\hat{y}_1'-\hat{y}_1) + \hat{x}_1(\hat{x}_1'-\hat{x}_1)]\frac{1}{K_1}\,,$$

$$S_2 = -W_2 + \frac{m_{20}}{n_2}\frac{\hat{y}_2^2+\hat{x}_2^2}{2\,\mathring{l}_2^2} - \frac{m_{21}}{n_2'}\frac{\hat{y}_2'^2+\hat{x}_2'^2}{2\,\mathring{l}_2'^2} + [\hat{y}_2(\hat{y}_2'-\hat{y}_2) + \hat{x}_2(\hat{x}_2'-\hat{x}_2)]\frac{1}{K_2}\,,$$

$$S = -W + \frac{m_{10}}{n_1}\frac{\hat{y}_1^2+\hat{x}_1^2}{2\,\mathring{l}_1^2} - \frac{m_{21}}{n_2'}\frac{\hat{y}_2'^2+\hat{x}_2'^2}{2\,\mathring{l}_2'^2} + [\hat{y}_1(\hat{y}_2'-\hat{y}_1) + \hat{x}_1(\hat{x}_2'-\hat{x}_1)]\frac{1}{K}$$

$$\text{mit}\left\{\begin{aligned} n_2 &= n_1',\\ m_{20} &= m_{11},\\ \hat{y}_2 &= \hat{y}_1',\\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_1',\\ \mathring{y}_2 &= \mathring{y}_1',\\ \mathring{x}_2 &= \mathring{x}_1',\\ \mathring{l}_2 &= \mathring{l}_1',\\ K_2 &= K_1 = K. \end{aligned}\right.$$

Da nun aus der geometrischen Bedeutung des Winkeleikonals folgt, daß $W = W_1 + W_2$ ist, so gilt für die Beziehung zwischen S einerseits, S_1 und S_2 andererseits

$$S = S_1 + S_2 + [(\hat{y}_1 - \hat{y}_1')(\mathring{y}_2' - \mathring{y}_2) + (\hat{x}_1 - \hat{x}_1')(\mathring{x}_2' - \mathring{x}_2)]\frac{1}{K},$$

wofür wir auch nach (XIII 3,4a) schreiben können

$$S = S_1 + S_2 + \left[\frac{\partial S_1}{\partial \mathring{y}_1'} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \hat{y}_2} + \frac{\partial S_1}{\partial \mathring{x}_1'} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \hat{x}_2}\right]. \qquad \text{(XIII 5,7)}$$

Tatsächlich benötigen wir S als Funktion von $\hat{y}_1$, $\hat{x}_1$, $\mathring{y}_2'$, $\mathring{x}_2'$. Um dies zu erreichen, entwickeln wir S_1 und S_2 nach Potenzen ihrer Variablen bis zu Gliedern 4. Potenz (einschließlich) und fassen — wie oben — die Glieder gleicher Potenz zu den Teilfunktionen $S_1^{(0)}$, $S_2^{(0)}$, $S_1^{(4)}$, $S_2^{(4)}$ zusammen. (Teilfunktionen $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ treten ja — wie wir oben sahen — nicht auf.) Die konstanten Glieder $S_1^{(0)}$, $S_2^{(0)}$ interessieren nicht, da nur die Ableitungen der SEIDELschen Eikonalfunktionen benötigt werden. Wir erhalten so

$$S = \cdots + S_1^{(4)}(\hat{y}_1, \hat{x}_1, \mathring{y}_1', \mathring{x}_1') + S_2^{(4)}(\hat{y}_2, \hat{x}_2, \mathring{y}_2', \mathring{x}_2') + \cdots, \qquad \text{(XIII 5,8)}$$

worin

$$\mathring{y}_2 = \mathring{y}_2' - \frac{\partial S_2}{\partial \hat{y}_2} \cdot K_2; \qquad \mathring{x}_2 = \mathring{x}_2' - \frac{\partial S_2}{\partial \hat{x}_2} \cdot K_2; \qquad \hat{y}_1' = \hat{y}_1 - \frac{\partial S_1}{\partial \mathring{y}_1'} \cdot K_1;$$

$$\hat{x}_1' = \hat{x}_1 - \frac{\partial S_1}{\partial \mathring{x}_1'} \cdot K_1$$

ist mit $K_1 = K_2 = K$.

Unter Benutzung der TAYLORschen Reihenentwicklung ergibt sich

$$\begin{aligned} S_1^{(4)}(\hat{y}_1, \hat{x}_1, \mathring{y}_1', \mathring{x}_1') &= S_1^{(4)}(\hat{y}_1, \hat{x}_1, \mathring{y}_2, \mathring{x}_2)\\ &= S_1^{(4)}(\hat{y}_1, \hat{x}_1, \mathring{y}_2', \mathring{x}_2) - \left[\frac{\partial S_1^{(4)}}{\partial \mathring{y}_2} \cdot \frac{\partial S_2^{(4)}}{\partial \hat{y}_2} + \frac{\partial S_1^{(4)}}{\partial \mathring{x}_2} \cdot \frac{\partial S_2^{(4)}}{\partial \hat{x}_2}\right] K_1 K_2,\\ S_2^{(4)}(\hat{y}_2, \hat{x}_2, \mathring{y}_2', \mathring{x}_2') &= S_2^{(4)}(\hat{y}_1', \hat{x}_1', \mathring{y}_2', \mathring{x}_2')\\ &= S_2^{(4)}(\hat{y}_1, \hat{x}_1, \mathring{y}_2', \mathring{x}_2') - \left[\frac{\partial S_2^{(4)}}{\partial \hat{y}_1'} \cdot \frac{\partial S_1^{(4)}}{\partial \mathring{y}_1'} + \frac{\partial S_2^{(4)}}{\partial \hat{x}_1'} \cdot \frac{\partial S_1^{(4)}}{\partial \mathring{x}_1'}\right] K_1 K_2, \end{aligned}$$

worin

$$\frac{\partial S_1^{(4)}}{\partial \hat{y}_2} = \frac{\partial S_1^{(4)}}{\partial \hat{y}_1'}, \qquad \frac{\partial S_1^{(4)}}{\partial \hat{x}_2} = \frac{\partial S_1^{(4)}}{\partial \hat{x}_1'}, \qquad \frac{\partial S_2^{(4)}}{\partial \hat{y}_1'} = \frac{\partial S_2^{(4)}}{\partial \hat{y}_2}, \qquad \frac{\partial S_2^{(4)}}{\partial \hat{x}_1'} = \frac{\partial S_2^{(4)}}{\partial \hat{x}_2}$$

also berechenbar sind.

In beiden TAYLOR-Entwicklungen sind aber die beiden letzten Entwicklungsglieder Produkte zweier Faktoren, die selbst von 3. Ordnung in den Variablen sind, so daß die betreffenden Glieder von 6. Ordnung, in den Grenzen der Abbildungsfehler 3. Ordnung also zu vernachlässigen sind. Wir erhalten so — an Stelle von (XIII 5,8) —

$$S = \cdots + S_1^{(4)}(\hat{y}_1, \hat{x}_1, \hat{y}_2', \hat{x}_2') + S_2^{(4)}(\hat{y}_1, \hat{x}_1, \hat{y}_2', \hat{x}_2') + \cdots, \qquad \text{(XIII 5,9)}$$

worin die durch $\cdots$ angedeuteten Glieder konstant bzw. von 6. und höherer Ordnung klein sind.

Das SEIDELsche Eikonal des ersten Teilsystems sei jetzt — etwas allgemeiner als früher — gegeben durch

$$S_1^{(4)} = -\frac{1}{4} A_1 \hat{\varrho}_1^4 - \frac{1}{4} B_1 \hat{\varrho}_1'^4 - C_1 \hat{\eta}_1^4 - \frac{1}{2} D_1 \hat{\varrho}_1^2 \hat{\varrho}_1'^2 + E_1 \hat{\varrho}_1^2 \hat{\eta}_1^2 + F_1 \hat{\varrho}_1'^2 \hat{\eta}_1^2$$

m

$$\hat{\varrho}_1^2 = \hat{y}_1^2 + \hat{x}_1^2; \qquad \hat{\varrho}_1'^2 = \hat{y}_1'^2 + \hat{x}_1'^2; \qquad \hat{\eta}_1^2 = \hat{y}_1 \hat{y}_1' + \hat{x}_1 \hat{x}_1'.$$

En sprechend laute das Eikonal des zweiten Teilsystems

$$S_2^{(4)} = -\frac{1}{4} A_2 \hat{\varrho}_2^4 - \frac{1}{4} B_2 \hat{\varrho}_2'^4 - C_2 \hat{\eta}_2^4 - \frac{1}{2} D_2 \hat{\varrho}_2^2 \hat{\varrho}_2'^2 + E_2 \hat{\varrho}_2^2 \hat{\eta}_2^2 + F_2 \hat{\varrho}_2'^2 \hat{\eta}_2^2$$

mit

$$\hat{\varrho}_2^2 = \hat{y}_2^2 + \hat{x}_2^2; \qquad \hat{\varrho}_2'^2 = \hat{y}_2'^2 + \hat{x}_2'^2; \qquad \hat{\eta}_2 = \hat{y}_2 \hat{y}_2' + \hat{x}_2 \hat{x}_2'.$$

Für das SEIDELsche Eikonal des *Gesamt*systems folgt daraus — indem wir nach (XIII 5,9)

$\hat{y}_2$ durch $\hat{y}_1$,
$\hat{x}_2$ durch $\hat{x}_1$

und

$\hat{y}_1'$ durch $\hat{y}_2'$,
$\hat{x}_1'$ durch $\hat{x}_2'$

ersetzen —

$$S^{(4)} = S_{1+2}^{(4)} = -\frac{1}{4}(A_1 + A_2)\hat{\varrho}_1^4 + \frac{1}{4}(B_1 + B_2)\hat{\varrho}_2'^4 - (C_1 + C_2)\hat{\eta}_{12}^4$$
$$-\frac{1}{2}(D_1 + D_2)\hat{\varrho}_1^2 \hat{\varrho}_2'^2 + (E_1 + E_2)\hat{\varrho}_1^2 \hat{\eta}_{12}^2 + (F_1 + F_2)\hat{\varrho}_2'^2 \hat{\eta}_{12}^2$$

mit

$$\hat{\eta}_{12}^2 = \hat{y}_1 \hat{y}_2' + \hat{x}_1 \hat{x}_2.$$

Die einzelnen Bildfehlerkoeffizienten des *Gesamt*systems setzen sich also *einfach additiv* aus denjenigen der Teilsysteme zusammen, und zwar auch dann, wenn es sich um mehr als zwei Teilsysteme handelt, wie man unmittelbar durch sukzessive Anwendung von (XIII 5,9) erkennt.

5b. Die „SEIDELschen Bildfehler"

Um eine optische Abbildung auf ihre geometrisch-optischen Fehler hin zu untersuchen, ist es daher nur erforderlich, für jede der brechenden oder spiegelnden Flächen das SEIDELsche Eikonal als Funktion der die Flächen bestimmenden Konstanten (z. B. Krümmungsradius r und Deformationskonstante) und der Brechungsindizes aufzustellen und die entsprechenden Fehlerkoeffizienten zu addieren.

Haben wir es demnach mit einem aus mehreren Teilsystemen bestehenden optischen System zu tun, so gilt

$$\frac{(\triangle y_k')_{\mathrm{mer}}}{\beta'} = \mathring{\varrho}_k'^3 \cos\mathring{\psi} \cdot \sum_1^k B_\nu + \mathring{y}_1^2 \mathring{\varrho}_k' \cos\mathring{\psi} \cdot \sum_1^k D_\nu$$
$$- \mathring{y}_1 \mathring{\varrho}_k'^2 (2 + \cos 2\mathring{\psi}) \cdot \sum_1^k F_\nu + 2 \mathring{y}_1^2 \mathring{\varrho}_k' \cos\mathring{\psi} \cdot \sum_1^k C_\nu - \mathring{y}_1^3 \cdot \sum_1^k E_\nu, \quad \text{(XIII 5,3}_\Sigma\text{)}$$

$$\frac{(\triangle y_k')_{\mathrm{sag}}}{\beta'} = \mathring{\varrho}_k'^3 \sin\mathring{\psi} \cdot \sum_1^k B_\nu + \mathring{y}_1^2 \mathring{\varrho}_k' \sin\mathring{\psi} \cdot \sum_1^k D_\nu - \mathring{y}_1 \mathring{\varrho}_k'^2 \sin 2\mathring{\psi} \cdot \sum_1^k F_\nu, \quad \text{(XIII 5,6}_\Sigma\text{)}$$

worin wir statt $\mathring{\psi}'$ gleich $\mathring{\psi}$ geschrieben haben, da wir uns ja auf rotationssymmetrische Systeme beschränken und es sich bei $(\mathring{\varrho}_k', \mathring{\psi}')$ um die Bestimmungsstücke eines vom Objektpunkt $(y_1, x_1 = 0)$ ausgehenden Strahls handelt, der die EP-Ebene des Gesamtsystems im Punkte $(\mathring{y} = \mathring{\varrho} \cos\mathring{\psi}, \mathring{x} = \mathring{\varrho} \sin\mathring{\psi})$ durchsetzt hat, die EP-Ebene des Gesamtsystems also in einem in der gleichen Meridianebene liegenden Punkte $(\mathring{y}_k' = \mathring{\varrho}_k' \cos\mathring{\psi}, \mathring{x}_k' = \mathring{\varrho}_k' \sin\mathring{\psi})$ trifft, und wegen

$$\frac{\mathring{y}_1}{\mathring{x}_1} = \frac{y_1}{x_1} \quad \text{und} \quad \frac{\mathring{y}_k'}{\mathring{x}_k'} = \frac{y_k'}{x_k'} \quad \text{[nach (XIII 3,3)]}$$

beim Übergang zu den „SEIDELschen (Blenden-)Koordinaten" die „Meridianebenen" keine Drehung erfahren.

In (XIII 5,3$_\Sigma$) und (XIII 5,6$_\Sigma$) können wir — da es sich bereits ausschließlich um Glieder 3. Ordnung (in $\mathring{\varrho}_k'$ und $\mathring{y}_1$) handelt — ohne Bedenken

$$\mathring{\varrho}_k' = \frac{\mathring{\varrho}_k'}{\mathring{l}_k'} K_k = \frac{\mathring{\varrho}_1}{\mathring{l}_1} \frac{n_1 l_1 \mathring{l}_1}{m_{01}} = \frac{n_1 \mathring{\varrho}_1}{s_1 - \mathring{s}_1}$$

setzen. Da außerdem nach (XIII 5,4) $\mathring{y}_1 = \frac{n_1}{s_1} t_1 y_1$ ist, erhalten wir — entsprechend (XIII 5,3) und (XIII 5,6) —

$$\frac{(\triangle y_k')_{\mathrm{mer}}}{\beta'} = \frac{n_1^3}{(s_1 - \mathring{s}_1)^3} \mathring{\varrho}_1^3 \cos\mathring{\psi}_1 \cdot \sum_1^k B_\nu - \frac{n_1^3 t_1}{s_1 (s_1 - \mathring{s}_1)^2} \mathring{\varrho}_1^2 y_1 (2 + \cos 2\mathring{\psi}_1) \cdot \sum_1^k F_\nu$$
$$+ \frac{n_1^3 t_1^2}{s_1^2 (s_1 - \mathring{s}_1)} \mathring{\varrho}_1 y_1^2 \cos\mathring{\psi}_1 \cdot \sum_1^k (2 C_\nu + D_\nu) - \frac{n_1^3 t_1^3}{s_1^3} y_1^3 \cdot \sum_1^k E_\nu, \quad \text{(XIII 5,10}_\mathrm{m}\text{)}$$

$$\frac{(\triangle y_k')_{\text{sag}}}{\beta'} = \frac{n_1^3}{(s_1 - \mathring{s}_1)^3} \mathring{\varrho}_1^3 \sin \mathring{\psi}_1 \cdot \sum_1^k B_\nu - \frac{n_1^3 t_1}{s_1 (s_1 - \mathring{s}_1)^2} \mathring{\varrho}_1^2 y_1 \cdot \sum_1^k F_\nu + \frac{n_1^3 t_1^2}{s_1^2 (s_1 - \mathring{s}_1)} \mathring{\varrho}_1 y_1^2 \sin \mathring{\psi}_1 \cdot \sum_1^k D_\nu . \qquad \text{(XIII 5,10}_s\text{)}$$

Die Bildfehlerkoeffizienten B, C, D, E, F des Gesamtsystems setzen sich also additiv aus den jeweils entsprechenden Bildfehlerkoeffizienten der einzelnen Teilsysteme, speziell also *der einzelnen Flächen*, zusammen.

Betrachten wir deshalb noch die Brechung an einer *einzelnen* Fläche. Handelt es sich um eine Kugelfläche, so lautet ihre Gleichung

$$z_I - a = r - \sqrt{r^2 - y_I^2 - x_I^2} ,$$

wobei a die Abszisse des Scheitels und r der Radius ist. Entwickeln wir die Wurzel, die in dieser Gleichung auftritt, so erhalten wir bis zu Gliedern 4. Ordnung, wenn wir mit x_I, y_I, z_I die Koordinaten eines Punktes der Fläche bezeichnen

$$z_I = a + \frac{1}{2r} (y_I^2 + x_I^2) + \frac{1}{8r^3} (y_I^2 + x_I^2)^2 .$$

Wir denken uns nun diese Gleichung in der Art verallgemeinert, daß wir mit SCHWARZSCHILD ansetzen

$$z_I = a + \frac{1}{2r} (y_I^2 + x_I^2) + \frac{1}{8r^3} (1 + b) (y_I^2 + x_I^2)^2 . \qquad \text{(XIII 5,11)}$$

Hierbei haben wir durch b eine „Deformation“ der Fläche eingeführt, sind also von der Kugelfläche zu einer nichtsphärischen, aber rotationssymmetrischen deformierten Fläche übergegangen.

Bezeichnen wir wie vorher den längs der Achse gemessenen Abstand der Objektebene vom Flächenscheitel durch s, den Abstand der Bildebene durch s', ferner den Abstand der Eintrittspupille vom Flächenscheitel durch $\mathring{s}$ ($= \mathring{z}$) und den der Austrittspupille vom Flächenscheitel durch $\mathring{s}'$ ($= \mathring{z}'$) und seien endlich n und n' die Brechungsindizes vor bzw. hinter der brechenden Fläche, so erhalten wir — wenn wir zunächst den Ausdruck für das Winkeleikonal aufstellen und hierfür die Fußpunkte der [in Abb. 74 (S. 161) nicht eingezeichneten] Lote von zwei beliebigen Punkten der Achse des Objektraumes bzw. des Bildraumes (z. B. den Achsenschnittpunkten der Objektebene einerseits, der Bildebene andererseits) auf einen in einer Meridianebene verlaufenden einfallenden und den ihm bildseitig zugeordneten Strahl wie oben (S. 160, Abb. 72) durch A_0 bzw. A_1 bezeichnen — für dieses Winkeleikonal nach Abb. 74

$$W = n \overrightarrow{A_0 I} + n' \overrightarrow{I A_1} = n [(z_I - s) \bar{\gamma} + y_I \bar{\beta} + x_I \bar{\alpha}] - n' [(z_I - s') \bar{\gamma}' + y_I \bar{\beta}' + x_I \bar{\alpha}'] , \qquad \text{(XIII 5,12)}$$

worin $\overrightarrow{A_0 I}$ die Komponenten $(z_I - s,\ y_I,\ x_I)$ und $\overrightarrow{I A_1}$ die Komponenten $(s' - z_I,\ y_I,\ x_I)$ hat, so daß — wenn wir $\bar{\gamma} = \sqrt{1 - \bar{\beta}^2 - \bar{\alpha}^2}$ setzen und

(XIII 5,12) nach Potenzen von x_I, y_I, $\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}$ bis zur 4. Ordnung einschließlich entwickeln, indem wir noch z_I nach (XIII 5,11) durch y_I und x_I ausdrücken — die Beziehung gilt

$$W = n's' - ns + n\left[y_I\bar{\beta} + x_I\bar{\alpha} + \frac{y_I^2 + x_I^2}{2r} + \frac{s}{2}(\bar{\beta}^2 + \bar{\alpha}^2) + (y_I^2 + x_I^2)^2\frac{(1+b)}{8r^3}\right.$$
$$\left. - \frac{(y_I^2 + x_I^2)(\bar{\beta}^2 + \bar{\alpha}^2)}{4r} + s\frac{(\bar{\beta}^2 + \bar{\alpha}^2)^2}{8}\right]$$
$$- n'\left[y_I\bar{\beta}' + x_I\bar{\alpha}' + \frac{y_I^2 + x_I^2}{2r} + \frac{s'}{2}(\bar{\beta}'^2 + \bar{\alpha}'^2) + (y_I^2 + x_I^2)^2\frac{(1+b)}{8r^3}\right.$$
$$\left. - \frac{(y_I^2 + x_I^2)(\bar{\beta}'^2 + \bar{\alpha}'^2)}{4r} + s'\frac{(\bar{\beta}'^2 + \bar{\alpha}'^2)^2}{8}\right].$$

Hierin haben wir noch — um W als Funktion der $\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}'$, $\bar{\alpha}'$ allein zu erhalten — die Koordinaten y_I, x_I der Flächenpunkte zu eliminieren. Bezeichnen wir die Abstände der Schnittpunkte des objektseitigen bzw. bildseitigen Strahls mit der Achse vom Flächenscheitel mit $\bar{s}$ bzw. $\bar{s}'$, so gilt innerhalb der GAUSSschen Optik[1]

$$\frac{n'}{\bar{s}'} - \frac{n}{\bar{s}} = \frac{n' - n}{r},$$

also auch

$$n'\frac{y_I}{\bar{s}'} - n\frac{y_I}{\bar{s}} = n'\bar{\beta}' - n\bar{\beta} = \frac{n' - n}{r}y_I,$$
$$n'\frac{x_I}{\bar{s}'} - n\frac{x_I}{\bar{s}} = n'\bar{\alpha}' - n\bar{\alpha} = \frac{n' - n}{r}x_I, \qquad \text{(XIII 5,12*)}$$

so daß

$$y_I = \frac{r}{n' - n}(n'\bar{\beta}' - n\bar{\beta}),$$
$$x_I = \frac{r}{n' - n}(n'\bar{\alpha}' - n\bar{\alpha}). \qquad \text{(XIII 5,12**)}$$

Vom Winkeleikonal gehen wir wieder zum SEIDELschen Eikonal über. Hierzu sind die Winkelkosinus-Größen durch die in zweckentsprechend gewählten Einheiten gemessenen Koordinaten $\hat{y}$, $\hat{x}$, $\hat{y}'$, $\hat{x}'$ nach (XIII 3,3a) auszudrücken. Da es sich bei den verschiedenen durchzuführenden Transformationen nur um solche linearer Natur handelt, ändert sich die Größenordnung der einzelnen zu transformierenden Ausdrücke nicht. Und da andererseits die Reihenentwicklung von S keine Glieder 2. Ordnung besitzt und für unsere weitere Behandlung der Bildfehler 3. Ordnung nur die Glieder 4. Ordnung erforderlich

[1] Daß wir uns hier auf diese beschränken können, erkennen wir leicht, wenn wir beachten, daß dadurch in (XIII 5,11) nur Größen 3. Ordnung in $\bar{\beta}$, $\bar{\beta}'$ bzw. $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}'$ vernachlässigt sind, kleine Änderungen von y_I und x_I aber wegen der Minimaleigenschaft von W nur quadratisch, die vernachlässigten Größen also nur in 6. Potenz in W eingehen.

sind, können wir uns auf diese beschränken, die wegen der erwähnten Linearität der Transformationsgleichungen nur aus den Gliedern 4. Ordnung von W hervorgehen, also aus

$$W^{(4)} = n\left[(y_I^2 + x_I^2)^2 \frac{1+b}{8\,r^3} - \frac{(y_I^2 + x_I^2)\,(\bar\beta^2 + \bar\alpha^2)}{4\,r} + s\,\frac{(\bar\beta^2 + \bar\alpha^2)^2}{8}\right]$$
$$- n'\left[(y_I^2 + x_I^2)^2 \frac{1+b}{8\,r^3} - \frac{(y_I^2 + x_I^2)\,(\bar\beta'^2 + \bar\alpha'^2)}{4\,r} + s'\,\frac{(\bar\beta'^2 + \bar\alpha'^2)^2}{8}\right],$$

wofür wir auch schreiben können, da

$$\frac{n}{r} - \frac{n'}{r} = \frac{n}{s} - \frac{n'}{s'},$$

also

$$\frac{n}{r}\,(y_I^2 + x_I^2)^2 - \frac{n'}{r}\,(y_I^2 + x_I^2)^2 = \frac{n}{s}\,(y_I^2 + x_I^2)^2 - \frac{n'}{s'}\,(y_I^2 + x_I^2)^2$$

ist,

$$W^{(4)} = \frac{1}{8}\frac{n}{s}\left[\frac{y_I^2 + x_I^2}{r} - s\,(\bar\beta^2 + \bar\alpha^2)\right]^2 - \frac{1}{8}\frac{n'}{s'}\left[\frac{y_I^2 + x_I^2}{r} - s'\,(\bar\beta'^2 + \bar\alpha'^2)\right]^2$$
$$+ b\,\frac{n - n'}{8\,r}\left(\frac{y_I^2 + x_I^2}{r}\right)^2. \qquad \text{(XIII 5,13)}$$

Nun ist nach (XIII 3,3a)

$$\bar\beta = -\frac{\hat{\mathring{y}}}{n\,l} + \frac{\hat y}{n\,\mathring{l}}\,; \qquad \bar\alpha = -\frac{\hat{\mathring{x}}}{n\,l} + \frac{\hat x}{n\,\mathring{l}},$$
$$\bar\beta' = -\frac{\hat{\mathring{y}}'}{n'\,l'} + \frac{\hat y'}{n'\,\mathring{l}'}\,; \qquad \bar\alpha' = -\frac{\hat{\mathring{x}}'}{n'\,l'} + \frac{\hat x'}{n'\,\mathring{l}'}. \qquad \text{(XIII 3,3a)}$$

Da in $W^{(4)}$ und dem hieraus durch Einsetzen der Ausdrücke für $\bar\beta$, $\bar\beta'$, $\bar\alpha$, $\bar\alpha'$ hervorgehenden SEIDELschen Eikonal $S^{(4)}$ nur Größen 4. Ordnung auftreten und $S^{(2)} \equiv 0$ ist, und da *außerdem* in den Grenzen der GAUSSschen Näherung

$$\hat{\mathring{y}} = \hat{\mathring{y}}', \quad \hat{\mathring{x}} = \hat{\mathring{x}}', \quad \hat y' = \hat y, \quad \hat x' = \hat x$$

ist, sich also die „gestrichenen“, d. h. *bild*seitigen Werte dieser „SEIDELschen Variablen“ von den „ungestrichenen“ entsprechenden Größen nur um Differenzen dritter Ordnung unterscheiden, können wir ohne Beschränkung der Genauigkeit von $S^{(4)}$ beim Übergang von $W^{(4)}$ zu $S^{(4)}$ die gestrichenen Variablen durch die ungestrichenen Variablen und umgekehrt ersetzen. Und da wir $S^{(4)}$ als Funktion der $\hat y$, $\hat x$, $\hat{\mathring{y}}'$, $\hat{\mathring{x}}'$ benötigen, um die nach (XIII 3,4a) erforderlichen partiellen Ableitungen zwecks Bestimmung der Bildfehler dritter Ordnung ausführen zu können, benutzen wir statt (XIII 3,3a) die Beziehungen

$$\bar\beta = -\frac{\hat{\mathring{y}}'}{n\,l} + \frac{\hat y}{n\,\mathring{l}}\,; \qquad \bar\alpha = -\frac{\hat{\mathring{x}}'}{n\,l} + \frac{\hat x}{n\,\mathring{l}}\,;$$
$$\bar\beta' = -\frac{\hat{\mathring{y}}'}{n'\,l'} + \frac{\hat y}{n'\,\mathring{l}'}\,; \qquad \bar\alpha' = -\frac{\hat{\mathring{x}}'}{n'\,l'} + \frac{\hat x}{n'\,\mathring{l}'}. \qquad \text{(XIII 5,14)}$$

Vor Anwendung dieser Transformationen auf (XIII 5,13) berücksichtigen wir, daß — wie in (XIII 3,5) —

$$\frac{s}{s-\mathring{s}}\,\mathring{l}=t=\frac{s'}{s'-\mathring{s}'}\,\mathring{l}'\left(=\frac{\mathring{l}}{m_0}\,s=\frac{\mathring{l}'}{m_1}\,s'\right) \qquad \text{(XIII 5,15)}$$

ist, wo t — entsprechend unserer früheren Bezeichnung — der Achsenabstand des Schnittpunktes des Strahles, der vom Achsenpunkt des Objektes ausgeht und die EP-Ebene im Achsenabstand $\mathring{l}$, die AP-Ebene demnach im Achsenabstand $\mathring{l}'$ durchsetzt, mit der brechenden Fläche ist, sofern $\frac{\mathring{l}}{s-\mathring{s}}$ genügend klein ist, also innerhalb der Grenzen der GAUSSschen Optik.

Entsprechend haben wir wegen $\mathring{\beta}'=\frac{n\,\mathring{s}'}{n'\,\mathring{s}}$

$$\frac{l\,\mathring{s}}{m_0}\left(=\frac{n'\,l'\,\mathring{l}'}{n\,\mathring{l}\,m_1}\,\mathring{s}=\frac{n'}{n}\,\mathring{\beta}'\,\frac{l'}{m_1}\,\mathring{s}\right)=\frac{l'\,\mathring{s}'}{m_1}=-\mathring{t}=\frac{l\,\mathring{s}}{s-\mathring{s}}=\frac{l'\,\mathring{s}'}{s'-\mathring{s}'}. \qquad \text{(XIII 5,16)}$$

Hier ist $\mathring{t}$ der Achsenabstand eines durch die Mitte der EP gehenden, die Objektebene im Achsenabstand l treffenden Strahles an der Stelle seines Schnittpunktes mit der brechenden Fläche. Bildseitig geht dieser Strahl in den Grenzen der GAUSSschen Abbildung durch die Mitte der AP und trifft die Bildebene im Achsenabstand l'.

Die Transformationsformeln (XIII 5,14) lassen sich demnach mit Berücksichtigung von (XIII 3,3) schreiben, da

$$\frac{\hat{y}}{n\,\mathring{l}}=\frac{\hat{y}\,l}{K\,m_0}=-\frac{\hat{y}}{K}\,\frac{\mathring{t}}{\mathring{s}}, \qquad \frac{\hat{y}}{n'\,\mathring{l}'}=\frac{\hat{y}\,l'}{K\,m_1}=-\frac{\hat{y}}{K}\,\frac{\mathring{t}}{\mathring{s}'},$$

$$\frac{\hat{\mathring{y}}'}{n\,l}=\frac{\hat{\mathring{y}}'\,\mathring{l}}{K\,m_0}=\frac{\hat{\mathring{y}}'}{K}\,\frac{t}{s}, \qquad \frac{\hat{\mathring{y}}'}{n'\,l'}=\frac{\hat{\mathring{y}}'\,\mathring{l}'}{K\,m_1}=\frac{\hat{\mathring{y}}'}{K}\,\frac{t}{s'},$$

$$\frac{\hat{x}}{n\,\mathring{l}}=-\frac{\hat{x}}{K}\,\frac{\mathring{t}}{s}, \qquad \frac{\hat{x}}{n'\,\mathring{l}'}=-\frac{\hat{x}}{K}\,\frac{\mathring{t}}{\mathring{s}'}, \qquad \frac{\hat{\mathring{x}}'}{n\,l}=\frac{\hat{\mathring{x}}'}{K}\,\frac{t}{s}, \qquad \frac{\hat{\mathring{x}}'}{n'\,l'}=\frac{\hat{\mathring{x}}'}{K}\,\frac{t}{s'}$$

ist,

$$\bar{\beta}=-\frac{1}{K}\left(\hat{\mathring{y}}'\,\frac{t}{s}+\hat{y}\,\frac{\mathring{t}}{\mathring{s}}\right); \qquad \bar{\alpha}=-\frac{1}{K}\left(\hat{\mathring{x}}'\,\frac{t}{s}+\hat{x}\,\frac{\mathring{t}}{\mathring{s}}\right),$$

$$\bar{\beta}'=-\frac{1}{K}\left(\hat{\mathring{y}}'\,\frac{t}{s'}+\hat{y}\,\frac{\mathring{t}}{\mathring{s}'}\right); \qquad \bar{\alpha}'=-\frac{1}{K}\left(\hat{\mathring{x}}'\,\frac{t}{s'}+\hat{x}\,\frac{\mathring{t}}{\mathring{s}'}\right).$$

Aus (XIII 5,12) erhalten wir dann unter Berücksichtigung der paraxialen Abbildungsformel für s, s' bzw. für $\mathring{s}$, $\mathring{s}'$ für die Koordinaten des Punktes I der brechenden Fläche

$$y_I=-\frac{1}{K}\,(\hat{\mathring{y}}'\,t+\hat{y}\,\mathring{t}),$$

$$x_I=-\frac{1}{K}\,(\hat{\mathring{x}}'\,t+\hat{x}\,\mathring{t}).$$

Daraus finden wir mit den früheren Bezeichnungen (XIII 5,1$_1$) $\hat{\varrho}^2$, $\mathring{\varrho}'^2$ und $\hat{\eta}^2$ für die in $W^{(4)}$ nach (XIII 5,13) auftretenden Ausdrücke, wenn wir η statt $\hat{\eta}$ schreiben:

$$y_I^2 + x_I^2 = \frac{1}{K^2}(\hat{\varrho}^2 \mathring{t}^2 + 2\eta^2 t \mathring{t} + \mathring{\varrho}'^2 t^2),$$

$$\bar{\beta}^2 + \bar{\alpha}^2 = \frac{1}{K^2}\left(\hat{\varrho}^2 \frac{\mathring{t}^2}{\mathring{s}^2} + 2\eta^2 \frac{t\mathring{t}}{s\mathring{s}} + \mathring{\varrho}'^2 \frac{t^2}{s^2}\right),$$

$$\bar{\beta}'^2 + \bar{\alpha}'^2 = \frac{1}{K^2}\left(\hat{\varrho}^2 \frac{\mathring{t}^2}{\mathring{s}'^2} + 2\eta^2 \frac{t\mathring{t}}{s'\mathring{s}'} + \mathring{\varrho}'^2 \frac{t^2}{s'^2}\right),$$

so daß

$$n\left[\frac{y_I^2 + x_I^2}{r} - s(\bar{\beta}^2 + \bar{\alpha}^2)\right] = \frac{n}{K^2}\left[\hat{\varrho}^2 \mathring{t}^2\left(\frac{1}{r} - \frac{s}{\mathring{s}^2}\right) + 2\eta^2 t\mathring{t}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\mathring{s}}\right) + \mathring{\varrho}'^2 t^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)\right],$$

$$n'\left[\frac{y_I^2 + x_I^2}{r} - s'(\bar{\beta}'^2 + \bar{\alpha}'^2)\right] = \frac{n'}{K^2}\left[\hat{\varrho}^2 \mathring{t}^2\left(\frac{1}{r} - \frac{s'}{\mathring{s}'^2}\right) + 2\eta^2 t\mathring{t}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\mathring{s}'}\right) + \mathring{\varrho}'^2 t^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right)\right],$$

wofür wir auch mit den früheren Brechungsinvarianten

$$Q = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right); \qquad \mathring{Q} = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\mathring{s}}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\mathring{s}'}\right)$$

schreiben können

$$\begin{aligned} n[\quad] &= \left\{\mathring{t}^2 \hat{\varrho}^2\left[\mathring{Q} - (Q - \mathring{Q})\frac{s}{\mathring{s}}\right] + t^2 \mathring{\varrho}'^2 Q - 2\mathring{t} t \eta^2 \mathring{Q}\right\}\frac{1}{K^2}, \\ n'[\,(')\,] &= \left\{\mathring{t}^2 \hat{\varrho}^2\left[\mathring{Q} - (Q - \mathring{Q})\frac{s'}{\mathring{s}'}\right] + t^2 \mathring{\varrho}'^2 Q - 2\mathring{t} t \eta^2 \mathring{Q}\right\}\frac{1}{K^2}. \end{aligned} \qquad \text{(XIII 5,17)}$$

Wir erhalten so für $S^{(4)}$ aus (XIII 5,13)

$$\begin{aligned} 8K^4 S^{(4)} = &+ \hat{\varrho}^4 \mathring{t}^4 \left\{\frac{b}{r^3}\cdot \Delta(n) + \mathring{Q}^2 \cdot \Delta\frac{1}{ns} - 2\mathring{Q}(Q - \mathring{Q})\cdot\Delta\left(\frac{1}{n\mathring{s}}\right)\right. \\ &\left. + (Q - \mathring{Q})\cdot\Delta\left(\frac{s}{n\mathring{s}^2}\right)\right\} \\ &+ \mathring{\varrho}'^4 t^4 \left\{\frac{b}{r^3}\cdot\Delta(n) + Q^2\cdot\Delta\left(\frac{1}{ns}\right)\right\} \\ &+ 4\eta^4 t^2 \mathring{t}^2 \left\{\frac{b}{r^3}\cdot\Delta(n) + \mathring{Q}^2\cdot\Delta\left(\frac{1}{ns}\right)\right\} \\ &+ 2\hat{\varrho}^2 \mathring{\varrho}'^2 t^2 \mathring{t}^2 \left\{\frac{b}{r^3}\cdot\Delta(n) + Q\mathring{Q}\cdot\Delta\left(\frac{1}{ns}\right) - Q(Q - \mathring{Q})\cdot\Delta\left(\frac{1}{n\mathring{s}}\right)\right\} \\ &- 4\hat{\varrho}^2 \eta^2 t\mathring{t}^3 \left\{-\frac{b}{r^3}\cdot\Delta(n) + \mathring{Q}^2\cdot\Delta\left(\frac{1}{ns}\right) - \mathring{Q}(Q - \mathring{Q})\cdot\Delta\left(\frac{1}{n\mathring{s}}\right)\right\} \\ &- 4\mathring{\varrho}'^2 \eta^2 t^3 \mathring{t} \left\{-\frac{b}{r^3}\cdot\Delta(n) + Q\mathring{Q}\cdot\Delta\left(\frac{1}{ns}\right)\right\}, \end{aligned}$$

worin nach (XIII 5,15) und (XIII 5,16) mit der dort angegebenen strahlenoptischen Bedeutung

$$t = -\frac{\mathring{l}\, s}{\mathring{s} - s} = -\frac{\mathring{l}'\, s'}{\mathring{s}' - s'} \qquad \text{und} \qquad \mathring{t} = \frac{l\, \mathring{s}}{\mathring{s} - s} = \frac{l'\, \mathring{s}'}{\mathring{s}' - s'}$$

ist, also Größen darstellen, die sich — nach paraxialer Durchrechnung der beiden oben angegebenen speziellen Strahlen mit der oben getroffenen Wahl $l = 1$, $\mathring{l}$ leicht berechnen lassen.

Bei Kugelflächen, mit denen wir uns in den übrigen Abschnitten dieser „Grundlagen" allein beschäftigt haben, fallen die Glieder mit b fort. Da wir die Bildfehler nach (XIII 3,6) durch die partiellen Ableitungen von $S^{(4)}$ nach $\mathring{\mathfrak{y}}'$, bzw. $\mathring{\mathfrak{x}}'$ bekommen, so erhalten wir für die oben benutzten Koeffizienten $B_\nu, 2\,C_\nu + D_\nu, D_\nu, E_\nu, F_\nu$, wenn wir außer l_1 — wie oben — jetzt auch $\mathring{l}_1$ gleich der Längeneinheit wählen und demnach

$$\frac{t_\nu}{K_\nu}\left(= \frac{s_\nu}{n_\nu\, l_\nu} = \frac{s'_\nu}{n'_\nu\, l'_\nu}\right) = \frac{s_\nu}{n_1} \prod_1^{\nu-1} \frac{s_\mu}{s'_\mu},$$

$$\frac{\mathring{t}_\nu}{K_\nu}\left(= -\frac{\mathring{s}_\nu}{n_\nu\, \mathring{l}_\nu} = -\frac{\mathring{s}'_\nu}{n'_\nu\, \mathring{l}'_\nu}\right) = -\frac{\mathring{s}_\nu}{n_1} \prod_1^{\nu-1} \frac{\mathring{s}_\mu}{\mathring{s}'_\mu}$$

schreiben und beachten, daß

$$\prod_1^{\nu-1} \frac{s_{\mu+1}}{s'_\mu} = \frac{n_1\, s'_\nu}{n'_\nu\, s_1} \cdot \frac{1}{\beta'_{1\to\nu}},$$

$$\prod_1^{\nu-1} \frac{\mathring{s}_{\mu+1}}{\mathring{s}'_\mu} = \frac{n_1\, \mathring{s}'_\nu}{n'_\nu\, \mathring{s}_1}\, \frac{1}{\beta'_{1\to\nu}}$$

ist,

$$B_\nu = -\frac{1}{2}\, \frac{s_1^4}{n_1^4}\, \frac{s_\nu'^2}{n_\nu'^4\, \beta_{1\to\nu}'^4} \cdot Q_\nu^2 \mathbin{\triangle} \left(\frac{1}{ns}\right)_\nu,$$

$$2C_\nu + D_\nu = -\frac{1}{2}\, \frac{s_1^2\, \mathring{s}_1^2}{n_1^4}\, \frac{s_\nu'^2\, \mathring{s}_\nu'^2}{n_\nu'^4\, \beta_{1\to\nu}'^2\, \mathring{\beta}_{1\to\nu}'^2} \cdot \left[\mathring{Q}_\nu (Q_\nu + 2\mathring{Q}_\nu) \mathbin{\triangle} \left(\frac{1}{ns}\right)_\nu - Q_\nu (Q_\nu - \mathring{Q}_\nu) \mathbin{\triangle} \left(\frac{1}{n\mathring{s}}\right)_\nu\right],$$

$$D_\nu = -\frac{1}{2}\, \frac{s_1^2\, \mathring{s}_1^2}{n_1^4}\, \frac{s_\nu'^2\, \mathring{s}_\nu'^2}{n_\nu'^4\, \beta_{1\to\nu}'^2\, \beta_{1\to\nu}'^2} \cdot Q_\nu \left[\mathring{Q}_\nu \mathbin{\triangle} \left(\frac{1}{ns}\right)_\nu - (Q_\nu - \mathring{Q}_\nu) \mathbin{\triangle} \left(\frac{1}{n\mathring{s}}\right)_\nu\right],$$

$$E_\nu = -\frac{1}{2}\, \frac{s_1\, \mathring{s}_1^3}{n_1^4}\, \frac{s'_\nu\, \mathring{s}_\nu'^3}{n_\nu'^4\, \beta'_{1\to\nu}\, \beta_{1\to\nu}'^3} \cdot \mathring{Q}_\nu \left[\mathring{Q}_\nu \mathbin{\triangle} \left(\frac{1}{ns}\right)_\nu - (Q_\nu - \mathring{Q}_\nu) \mathbin{\triangle} \left(\frac{1}{n\mathring{s}}\right)_\nu\right],$$

$$F_\nu = -\frac{1}{2}\, \frac{s_1^3\, \mathring{s}_1}{n_1^4}\, \frac{s_\nu'^3\, \mathring{s}'_\nu}{n_\nu'^4\, \beta_{1\to\nu}'^3\, \beta'_{1\to\nu}} \cdot Q_\nu\, \mathring{Q}_\nu \mathbin{\triangle} \left(\frac{1}{ns}\right)_\nu.$$

Hier ist übrigens noch — wie man leicht zeigt —

$$\frac{n_1\, s'_\nu}{n'_\nu\, s_1}\, \frac{1}{\beta'_{1\to\nu}} = \frac{t_\nu}{t_1}; \qquad \frac{n_1\, \mathring{s}'_\nu}{n'_\nu\, \mathring{s}_1} = \frac{\mathring{t}_\nu}{\mathring{t}_1},$$

so daß wir die Koeffizienten auch schreiben können

$$
\begin{aligned}
B_\nu &= -\frac{1}{2}\,\frac{s_1^4}{n_1^4}\left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^4 \cdot Q_\nu^2\, \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_\nu ,\\
2\,C_\nu + D_\nu &= -\frac{1}{2}\,\frac{s_1^2\,\mathring{s}_1^2}{n_1^4}\left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^2\left(\frac{\mathring{t}_\nu}{\mathring{t}_1}\right)^2 \cdot \left[\mathring{Q}_\nu\,(Q_\nu + 2\,\mathring{Q}_\nu)\,\Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_\nu - Q_\nu\,(Q_\nu - \mathring{Q}_\nu)\,\Delta\left(\frac{1}{n\mathring{s}}\right)_\nu\right],\\
D_\nu &= -\frac{1}{2}\,\frac{s_1^2\,\mathring{s}_1^2}{n_1^4}\left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^2\left(\frac{\mathring{t}_\nu}{\mathring{t}_1}\right)^2 \cdot Q_\nu\left[\mathring{Q}_\nu\,\Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_\nu - (Q_\nu - \mathring{Q}_\nu)\,\Delta\left(\frac{1}{n\mathring{s}}\right)_\nu\right], \quad \text{(XIII 5,18)}\\
E_\nu &= -\frac{1}{2}\,\frac{s_1\,\mathring{s}_1^3}{n_1^4}\left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)\left(\frac{\mathring{t}_\nu}{\mathring{t}_1}\right)^3 \cdot \mathring{Q}_\nu\left[\mathring{Q}_\nu\,\Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_\nu - (Q_\nu - \mathring{Q}_\nu)\,\Delta\left(\frac{1}{n\mathring{s}}\right)_\nu\right],\\
F_\nu &= -\frac{1}{2}\,\frac{s_1^3\,\mathring{s}_1}{n_1^4}\left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^3\left(\frac{\mathring{t}_\nu}{\mathring{t}_1}\right) \cdot Q_\nu\,\mathring{Q}_\nu\,\Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_\nu .
\end{aligned}
$$

Die t_ν-Werte ergeben sich dabei aus der Durchrechnung eines vom Achsenpunkt des Objektes ausgehenden Strahles als die Achsenabstände seiner Schnittpunkte mit den achsensenkrechten Ebenen in den Flächenscheiteln, die $\mathring{t}_\nu$-Werte entsprechend aus der Durchrechnung eines durch den Achsenpunkt der EP-Ebene gehenden Strahles als die Achsenabstände seiner Schnittpunkte mit den genannten achsensenkrechten Ebenen, die übrigens auch bei geringer Strahlneigung durch die brechenden Flächen ersetzt werden können, so daß wir statt $t_\nu, t_1, \mathring{t}_\nu, \mathring{t}_1$ auch in unserer früheren Bezeichnungsweise t_ν, t_1, $\mathring{t}_\nu$, $\mathring{t}_1$ hätten schreiben können.

Daß B_ν mit dem im Abschnitt VI 2 eingeführten „Flächenteilkoeffizienten“ A_ν und demnach

$$-2\,\frac{n_1^4}{s_1^4}\sum_1^k B_\nu = \Sigma\, I_\nu$$

identisch ist, erkennt man sofort. Bei den übrigen Koeffizienten ist der Nachweis etwas komplizierter. Um auch für diese Koeffizienten den Identitätsnachweis mit den in VI 2 bzw. VI 1 benutzten Größen bzw. erhaltenen Formelausdrücken zu führen, müssen wir beachten, daß nach (III 1,4)

$$\frac{\mathring{t}_\nu}{\mathring{t}_1} = \frac{t_\nu}{t_1}\left(1 + n_1\,\frac{\mathring{s}_1 - s_1}{\mathring{s}_1\, s_1}\,\mathfrak{d}_\nu\right)$$

und nach (III 1,5)

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\mathring{s}'_\nu} - \dfrac{1}{s'_\nu}} = \frac{n'_\nu}{n_1}\left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^2\left[\frac{1}{\dfrac{1}{\mathring{s}_1} - \dfrac{1}{s_1}} - n_1\,\mathfrak{d}_\nu\right]$$

gilt, daß ferner

$$\mathring{Q}_\nu = Q_\nu + n'_\nu\left(\frac{1}{s'_\nu} - \frac{1}{\mathring{s}'_\nu}\right)$$

ist. Endlich sind noch die in VI 2 eingeführten Größen ε_ν, $\mathfrak{d}_\nu$, τ_ν sowie ihr Zusammenhang mit den Größen A_ν, B_ν, Γ_ν, P_ν und $\square_\nu$ zu beachten.

Wir überlassen es dem Leser, den erwähnten Identitätsnachweis selbst durchzuführen.

Anhang

XIV. Fernrohr-, Lupen-, Mikroskop- und Ablesevergrößerung

In I 3 auf S. 9 wurde die „laterale“ oder „Seiten-Vergrößerung“ β' — oft auch als (Abbildungs-)Maßstab bezeichnet — als das Verhältnis der Bildgröße zur Größe des abgebildeten Objektes definiert. In einer Anmerkung wurde darauf hingewiesen, daß es noch eine Reihe weiterer, anders definierter Vergrößerungen gibt. Einige dieser weiteren Vergrößerungsbegriffe wurden bereits in I 6 näher besprochen, nämlich die „axiale“ oder „Tiefenvergrößerung“ α' [s. (I 6,2)] sowie die „Winkelvergrößerung“ oder das „Konvergenzverhältnis“ γ' [s. (I 6,3)].

Nachstehend seien noch einige weitere Vergrößerungsbegriffe kurz erwähnt und erklärt, nämlich

die Fernrohrvergrößerung Γ',

die Lupen- bzw. Mikroskopvergrößerung $\overline{\Gamma}'$,

die Ablesevergrößerung $\overline{\overline{\Gamma}}'$.

Da es sich bei den Beobachtungen mit dem Fernrohr stets um Beobachtungen sehr weit entfernter Objekte handelt, so kann die Länge des Fernrohrs gegen den Abstand des Objektes vom Auge des Beobachters vernachlässigt werden. Bezeichnen wir den Winkel, unter dem das weit entfernte Objekt ohne Zwischenschaltung des Fernrohrs vom Beobachter aus erscheint, durch $2w$, den Winkel, unter dem das Objekt durch das Fernrohr — oder, was damit identisch ist, das vom Fernrohr erzeugte (virtuelle) Bild — dem Beobachter erscheint, durch $2w'$, so definiert man als *Fernrohrvergrößerung* die Größe

$$\Gamma' = \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w}.$$

Dabei ist also angenommen, daß die Verlängerung der optischen Achse des Fernrohrs das Objekt etwa in seinem Mittelpunkt trifft, eine Annahme, die indessen verhältnismäßig unwesentlich ist. Das vom Objektiv des Fernrohrs entworfene Bild des sehr weit entfernten Objektes liegt mit großer Näherung in der bildseitigen Brennebene des Fernrohrobjektivs. Da andererseits bei scharfer Einstellung des Fernrohrs auf das Objekt mit sehr großer Näherung diese Brennebene des Fernrohrobjektivs mit der objektseitigen Brennebene des Fernrohrokulars zusammenfällt, so läßt sich die Fernrohrvergrößerung Γ' auch durch die Brennweiten von Objektiv und Okular des Fernrohrs ausdrücken. Bezeichnen wir die Größe des vom Fernrohrobjektiv erzeugten Bildes des Objektes durch $2y_1'$, wobei $2y_1' = 2y_2$ gleichzeitig die Größe des vom

Okular abzubildenden „Objektes" bedeutet, so ist

$$\operatorname{tg} w' = \frac{y_2}{-f_{\mathrm{Ok}}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} w \approx \frac{y_1'}{f'_{\mathrm{Obj}}},$$

so daß

$$\boxed{\Gamma' = \frac{f'_{\mathrm{Obj}}}{f'_{\mathrm{Ok}}}}. \tag{XIV 1}$$

Die Vergrößerung $\overline{\Gamma}'_L$ einer Lupe ist definiert durch das Verhältnis des (Gesichtsfeld-)Winkels w', unter dem ein durch die Lupe betrachteter Gegenstand der (Größe y mm) erscheint, zu dem Winkel $\frac{y}{250}$, unter dem der gleiche Gegenstand der Größe y mm erscheinen würde, wenn er ohne Benutzung der Lupe betrachtet und sich dabei im Abstand der deutlichen Sehweite vom Auge des Beobachters befinden würde. Dabei wird diese „deutliche Sehweite s_w" gleich 250 mm angenommen.

Da sich bei Benutzung der Lupe der zu betrachtende Gegenstand angenähert in der objektseitigen Brennebene der Lupe befindet, um vom Auge des Beobachters ohne Akkomodation betrachtet werden zu können, ergibt sich für die Vergrößerung $\overline{\Gamma}'_L$ einer Lupe die Beziehung

$$\boxed{\overline{\Gamma}'_L = \frac{w'}{\frac{y}{s_w}} = \frac{w'}{\frac{(y)_{\mathrm{mm}}}{250}} = 250\,\frac{w'}{(y)_{\mathrm{mm}}} \approx \frac{250}{(f')_{\mathrm{mm}}}}, \tag{XIV 2}$$

worin $(\;)_{\mathrm{mm}}$ bedeutet, daß die betreffende Größe in mm gemessen gedacht ist.

Die Vergrößerung $\overline{\Gamma}'_M$ eines Mikroskops ist — wie die der Lupe — definiert durch das Verhältnis des Winkels w', mit der ein Gegenstand (der Größe y) durch das Mikroskop gesehen wird, zu dem Winkel w, unter dem er dem unbewaffneten Auge erscheint, wenn er sich in einem Abstand vom Auge befindet, der gleich der deutlichen Sehweite, also gleich 250 mm ist.

Da sich auch beim Mikroskop das zu betrachtende Objekt angenähert im objektseitigen Brennpunkt des Gesamtsystems befindet, so gilt auch hier wieder für die Vergrößerung $\overline{\Gamma}'_M$ die Beziehung

$$\boxed{\overline{\Gamma}'_M = \frac{250}{(f')_{\mathrm{mm}}}} \tag{XIV 3}$$

wenn $(f')_{\mathrm{mm}}$ die (in mm gemessene) bildseitige Brennweite des Mikroskops bezeichnet.

Bezeichnen wir nun (wie in II 4 [S. 22]) durch e die sogenannte „reduzierte Tubuslänge" des Mikroskops, d. h. den in mm gemessenen Abstand (im allgemeinen gleich 160 mm oder 170 mm) zwischen den beiden einander zugekehrten Brennpunkten von Objektiv und Okular und sind weiter f'_{Obj} die Objektivbrennweite, f'_{Ok} die Okularbrennweite, beide gleichfalls in mm gemessen, so

gilt für die Brennweite des Gesamtsystems die Beziehung (II 4,1*)

$$f' = -\frac{f'_{\mathrm{Obj}} \cdot f'_{\mathrm{Ok}}}{e}, \qquad \text{(XIV 4)}$$

so daß

$$\bar{\Gamma}'_M = \frac{250}{f'_{\mathrm{Obj}}} \cdot \frac{e}{f'_{\mathrm{Ok}}} = \bar{\Gamma}'_{\mathrm{Obj}} \cdot \Gamma'_{\mathrm{Ok}} \qquad \text{(XIV } 5_1\text{)}$$

oder

$$\bar{\Gamma}'_M = \frac{e}{f'_{\mathrm{Obj}}} \cdot \frac{250}{f'_{\mathrm{Ok}}} = -\beta'_{\mathrm{Obj}} \cdot \bar{\Gamma}'_{\mathrm{Ok}}, \qquad \text{(XIV } 5_2\text{)}$$

worin $\frac{e}{f'_{\mathrm{Obj}}} = \beta'_{\mathrm{Obj}}$ nach (II 2,1), da ja das durch das Mikroskopobjektiv entworfene Bild des betrachteten Objektes mit großer Näherung in der objektseitigen Brennebene des Okulars liegen muß, e also mit dem x' bezüglich des Objektivs identisch ist.

Die Darstellung von $\bar{\Gamma}'_M$ nach (XVI, 5_1) als Produkt von $\bar{\Gamma}'_{\mathrm{Obj}}$ und Γ'_{Ok} entspricht der (sachlich unrichtigen) Auffassung

Mikroskop = Lupe + Fernrohr,

bei der also das Mikroskopobjektiv als „Lupe" aufgefaßt wird, das Objekt sich also eigentlich etwas innerhalb der objektseitigen Brennweite des Mikroskopobjektivs befinden sollte und das durch das Mikroskopobjektiv entworfene Bild des Objektes dementsprechend virtuell und — im Sinne der Lichtausbreitung — in größerem Abstand vor dem Objektiv liegen sollte. Dies „Bild" wird dann durch das als „Fernrohr" wirkende Okular vom Beobachter betrachtet.

Die Darstellung von $\bar{\Gamma}'_M$ nach (XIV 5_2) entspricht dagegen der (berechtigten) Auffassung

Mikroskop = Projektionssystem + Lupe,

bei der sich das Objekt etwas außerhalb der objektseitigen Brennweite des Mikroskopobjektivs befindet und das durch das Mikroskopobjektiv entworfene (reelle) Bild, das jetzt etwas innerhalb der objektseitigen Brennweite des Okulars liegt, mit dem nunmehr als Lupe wirkenden Okular vom Beobachter betrachtet wird.

Wenden wir uns schließlich noch der „Ablesevergrößerung" zu, die durch $\bar{\Gamma}'$ bezeichnet wird. Diese bezieht sich auf die Beobachtung eines in endlicher, mit der Länge des zur Beobachtung benutzten Fernrohrs vergleichbarer Entfernung befindlichen Objektes — z. B. Teilungen auf einem Maßstab —, und zwar versteht man unter „Ablesevergrößerung" das Verhältnis $\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} \bar{w}} \approx \frac{w'}{\bar{w}}$, wenn $2w'$ der Winkel ist, unter dem — bei Betrachtung des Objektes durch das Ablesefernrohr — das Objekt erscheint, während $2\bar{w}$ der Winkel ist, unter dem das Objekt ohne Ablesefernrohr von der AP des Fernrohrs aus erscheinen würde. Dabei liegt die EP im allgemeinen an der Stelle des Objektivs oder doch in seiner unmittelbaren Nachbarschaft, während die AP im Sinne der Ausbreitungsrichtung des Lichtes kurz hinter dem Okular liegt.

XV. Sachverzeichnis